RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 marzo 1912.

F. D' Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle superficie minime cerchiate di Riemann.* Nota del Socio L. Bianchi.

1. Nella Memoria di Riemann: *Ueber die Flächen vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung* (1) viene trattato, al n. 19, il problema (di Plateau) di far passare una superficie d'area minima per un contorno formato da due circoli in piani paralleli, ed il problema si risolve ammettendo che tutte le sezioni fatte con piani paralleli a quei due estremi siano altrettanti circoli. Le superficie minime così trovate dipendono da due costanti arbitrarie e le loro equazioni si hanno in termini finiti per funzioni ellittiche (vedi più oltre n. 3).

Indipendentemente da Riemann, Enneper (2) ricercò tutte le superficie minime cerchiate e dimostrò che i piani dei circoli sono necessariamente paralleli, onde si è ricondotti unicamente al caso di Riemann.

Queste superficie minime cerchiate corrispondono, come Schwarz osservò (3), ad assumere nelle formole di Weierstrass per la funzione $F(s)$ l'espressione

$$F(s) = \frac{C}{s\sqrt{(s - \cot\varepsilon)\, s\,(s + \operatorname{tg}\varepsilon)}},$$

essendo C, ε costanti reali.

(1) Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft zu Göttingen, t. 13 (1867); vedi Riemann's Werke, pp. 329-333 (2ª edizione).

(2) Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. Phys., Bd. XIV (1869).

(3) *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen* (H), Schwarz's Werke, Bd. I.

Sulle superficie minime cerchiate citiamo ancora una Memoria di X. Stouff (1), ed infine un' interessante Nota di G. Juka (2), dove le equazioni di queste superficie minime sono poste sotto una semplice forma che ci sarà utile fra breve.

2. Scopo della presente Nota è di far conoscere una nuova interpretazione geometrica che possono ricevere le superficie minime cerchiate di Riemann in *metrica non-euclidea* (iperbolica). Tale interpretazione si fonda sulla nota circostanza che in queste superficie il luogo dei centri dei circoli è una linea piana, il cui piano π è normale a quelli dei circoli. Si consideri allora questo piano π come piano limite $z = 0$ in una metrica iperbolica definita, nella rappresentazione di Poincaré, da

$$(1) \qquad ds'^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}.$$

I circoli, ortogonali al piano limite, della superficie minima Σ rappresentano rette non-euclidee e la Σ è quindi, in metrica iperbolica, una superficie rigata. Ora, per le proprietà generali delle superficie minime, i circoli di Σ (linee di livello), insieme alle loro trajettorie ortogonali (linee di pendenza), formano un sistema isotermo, e la proprietà si conserva in metrica iperbolica, la rappresentazione di Poincaré essendo conforme.

Sulla nostra rigata Σ della metrica iperbolica le generatrici formano dunque colle trajettorie ortogonali un sistema isotermo, onde la superficie stessa è il luogo delle binormali di una curva a torsione costante. Dunque: *Ogni superficie minima cerchiata di Riemann, interpretata in metrica iperbolica, diventa la superficie luogo delle binormali di una curva Γ a torsione costante.*

Per definire completamente questa curva Γ, ne osserveremo ancora una altra proprietà che la caratterizza. Se alla superficie minima Σ diamo una traslazione continua normale ai piani dei circoli, ciascun punto della curva Γ si dirige normalmente ai circoli; e poichè la detta traslazione rappresenta anche un movimento continuo parabolico dello spazio a curvatura costante, ne risulta che la direzione dello spostamento, per ciascun punto di Γ, rimane nel piano osculatore non-euclideo di Γ, e la curva Γ resta dunque asintotica della superficie S generata. Siccome poi Γ ha costante la torsione, segue dal teorema di Enneper che la superficie S generata è a curvatura costante negativa. Abbiamo dunque il seguente teorema: *La curva Γ a torsione costante genera in un movimento continuo parabolico una superficie pseudosferica* S *di cui rimane asintotica.*

(1) *Sur une classe de surfaces minima.* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. VI (1892).

(2) Mathematische Annalen, Bd. 52 (1899).

Possiamo enunciare questo risultato sotto l'altra forma:

Se alla superficie minima cerchiata Σ *si dà una traslazione continua normale ai piani dei circoli, le* ∞^1 *posizioni di* Σ, *interpretate in metrica iperbolica, sono le superficie luogo delle normali ad una superficie pseudosferica lungo le asintotiche di un sistema.*

Di una proprietà analoga godono naturalmente le asintotiche del secondo sistema, sicchè la doppia infinità di circoli si ordina in due modi diversi in ∞^1 superficie minime cerchiate congruenti per traslazione.

3. Alle considerazioni geometriche precedenti facciamo ora seguire i calcoli che, mentre dànno la conferma analitica delle proprietà osservate, fanno conoscere di più, in termini finiti, le equazioni di questa singolare curva Γ a torsione costante dello spazio iperbolico e delle superficie pseudosferiche da essa generate.

Per la superficie minima cerchiata Σ assumiamo il piano della curva C_0, luogo dei centri dei circoli, per piano xy, mentre disponiamo il piano xz parallelamente ai piani di circoli. Secondo le formole stabilite da Juka (loc. cit.), le coordinate x_0, y_0 del centro mobile del circolo sono date, per un parametro u, mediante funzioni ellittiche di Jacobi a modulo arbitrario k, dalle espressioni

$$x_0 = \mu k' u + \frac{\mu}{k'}\left\{\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} - \mathrm{E}(u)\right\} \quad , \quad y_0 = \mu k u ,$$

dove k' è il modulo complementare, μ una seconda costante arbitraria, ed $\mathrm{E}(u)$ l'integrale di 2ª specie

$$\mathrm{E}(u) = \int_0^u \operatorname{dn}^2 u \, du ;$$

infine il raggio R del circolo è dato da

$$\mathrm{R} = \frac{\mu}{\operatorname{cn} u} .$$

Come si vede, la costante μ moltiplicativa influisce solo sulle dimensioni della superficie e rappresenta il raggio del circolo minimo; senza alterare la generalità potremo fare $\mu = 1$. Così la superficie minima cerchiata Σ sarà definita dalle formole:

$$(2) \qquad x = k' u + \frac{1}{k'}\left\{\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} - \mathrm{E}(u)\right\} + \frac{\cos \omega}{\operatorname{cn} u} \quad , \quad y = k u \quad , \quad z = \frac{\operatorname{sen} \omega}{\operatorname{cn} u} ,$$

che dànno le coordinate x, y, z di un suo punto, espresse per due parametri u, ω

Se calcoliamo il $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ della Σ in coordinate u, ω, troviamo

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,d\omega + G\,d\omega^2,$$

con

$$E = k^2 + \frac{k'^2 + \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u}{\mathrm{cn}^4 u} + 2k'\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}^4 u}\cos\omega\,,\quad F = -\frac{k'\,\mathrm{sen}\,\omega}{\mathrm{cn}^3 u}\,,\quad G = \frac{1}{\mathrm{cn}^2 u}\,.$$

L'equazione differenziale

$$F\,du + G\,d\omega = 0$$

delle trajettorie ortogonali dei circoli si scrive

$$\frac{d\omega}{\mathrm{sen}\,\omega} - \frac{k'\,du}{\mathrm{cn}\,u} = 0,$$

sicchè ponendo

$$v = \int \frac{d\omega}{\mathrm{sen}\,\omega} - \int \frac{k'\,du}{\mathrm{cn}\,u}\,,$$

cioè

$$v = \log \mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2} - \log \frac{\mathrm{dn}\,u + k'\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\,, \tag{3}$$

saranno appunto le $v = \text{cost}$ le trajettorie ortogonali dei circoli. Calcolando ora il ds^2 in coordinate u, v, troviamo

$$ds^2 = \left\{\left(\frac{k'\cos\omega + \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}^2 u}\right)^2 + k^2\right\} du^2 + \frac{\mathrm{sen}^2\omega}{\mathrm{cn}^2 u}\,dv^2\,, \tag{4}$$

dove resta ancora da esprimere $\mathrm{sen}\,\omega$, $\cos\omega$ per u, v. Per ciò traggasi dalla (3)

$$\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2} = \frac{\mathrm{dn}\,u + k'\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\,e^v$$

e, tenendo conto della identità

$$\mathrm{cn}^2 u = (\mathrm{dn}\,u + k'\,\mathrm{sn}\,u)(\mathrm{dn}\,u - k'\,\mathrm{sn}\,u),$$

ne dedurremo

$$\begin{cases} \cos\omega = -\dfrac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{senh}\,v + k'\,\mathrm{sn}\,u\cosh v}{\mathrm{dn}\,u\cosh v + k'\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{senh}\,v}\,, \\ \mathrm{sen}\,\omega = \dfrac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u\cosh v + k'\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{senh}\,v}\,. \end{cases} \tag{5}$$

Abbiamo quindi

$$\frac{k'\cos\omega + \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}^2 u} = \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,u\cosh v - k'\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{senh}\,v}{\mathrm{dn}\,u\cosh v + k'\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{senh}\,v}\,,$$

e perciò

$$\left(\frac{k'\cos\omega + \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u}\right)^2 + k^2 = \frac{k^2 \cosh^2 v + k'^2 \operatorname{senh}^2 v}{(\operatorname{dn} u \cosh v + k' \operatorname{sn} u \operatorname{senh} v)^2} .$$

Sostituendo nella (4), abbiamo la formola definitiva pel ds^2:

$$(6)\quad ds^2 = \frac{1}{(\operatorname{dn} u \cosh v + k' \operatorname{sn} u \operatorname{senh} v)^2} \{(k^2 \cosh^2 v + k'^2 \operatorname{senh}^2 v)\, du^2 + dv^2\},$$

la quale conferma che i circoli $u = \text{cost}$, colle trajettorie ortogonali $v = \text{cost}$, formano un sistema isotermo. Poichè inoltre u, e quindi $y = \frac{u}{k}$, è parametro d'isotermia resta confermato, per un noto teorema di Beltrami, che la superficie Σ è ad area minima.

4. Interpretiamo ora la superficie minima Σ come esistente nello spazio iperbolico di curvatura $K = -1$ e d'elemento lineare (1). Indicandone con ds' l'elemento lineare non-euclideo, avremo

$$ds'^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 \omega}{\operatorname{cn}^2 u} \cdot ds^2 ,$$

cioè per la (5_2)

$$ds'^2 = (\operatorname{dn} u \cosh v + k' \operatorname{sn} u \operatorname{senh} v)^2\, ds^2 .$$

Osservando la (6), abbiamo dunque

$$(7)\quad ds'^2 = (k^2 \cosh^2 v + k'^2 \operatorname{senh}^2 v)\, du^2 + dv^2 .$$

La curvatura geodetica delle $v = \text{cost}$ è qui

$$\frac{1}{\varrho_v} = \frac{\operatorname{senh} v \cosh v}{k^2 \cosh^2 v + k'^2 \operatorname{senh}^2 v} ,$$

e per ciò la linea $v = 0$, che indichiamo con Γ, è geodetica, sicchè l'attuale rigata Σ è il luogo delle binormali di Γ. Se, colle formole di Frenet in metrica iperbolica [1], si calcola l'elemento lineare della rigata delle binormali ad una curva e si identifica con (7), si trova che: *La torsione* $\frac{1}{T}$ *della nostra curva* Γ *è costante, precisamente*

$$\frac{1}{T} = \frac{k'}{k} .$$

La prima proprietà dedotta geometricamente al n. 2 è così confermata dal calcolo. Di più possiamo ora scrivere le equazioni in termini finiti della

[1] Vedi le mie *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, §§ 201-202.

curva Γ a torsione costante $\frac{1}{T} = \frac{k'}{k}$ ponendo nelle (2) $v = 0$, cioè secondo le (5)

$$\cos\omega = -\frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} \quad , \quad \operatorname{sen}\omega = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} .$$

Così: *la curva Γ è data, in termini finiti, dalle equazioni*

$$(8) \qquad x = k'u + \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{k' \operatorname{dn} u} - \frac{1}{k'} \mathrm{E}(u) \quad , \quad y = ku \quad , \quad z = \frac{1}{\operatorname{dn} u} .$$

Si noti inoltre che, per la (7), il suo arco s non-euclideo è

$$s = ku .$$

Possiamo anche facilmente calcolare la prima curvatura (flessione non euclidea) $\frac{1}{\varrho}$ della nostra curva Γ in funzione dell'arco s con la formola

$$\frac{1}{\varrho^2} = \operatorname{dn}^2 u \left\{ \left(\frac{d^2x}{ds^2} - 2 \operatorname{dn} u \frac{dx}{ds} \frac{dz}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} - 2 \operatorname{dn} u \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{d^2z}{ds^2} + \operatorname{dn} u \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 - \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right] \right)^2 \right\} ,$$

che deriva dalla formola generale (31) a pag. 364 del 1° volume delle mie *Lezioni di geometria differenziale*. Qui troviamo

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = -kk' \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u} \quad , \quad \frac{dy}{ds} = 1 \quad , \quad \frac{dz}{ds} = \frac{k \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^2 u} \\ \frac{d^2x}{ds^2} = -2k' \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^3 u} \quad , \quad \frac{d^2y}{ds^2} = 0 \quad , \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{\operatorname{cn}^2 u - k'^2 \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^3 u} ; \end{cases}$$

e sostituendo nel valore di $\frac{1}{\varrho^2}$, e riducendo, risulta la semplice formola

$$\frac{1}{\varrho} = 2 \operatorname{cn} u .$$

Vediamo adunque che: *La curva Γ a torsione costante nello spazio iperbolico, data in termini finiti dalle* (8), *è definita dalle equazioni intrinseche*

$$(9) \qquad \frac{1}{T} = \frac{k'}{k} \quad , \quad \frac{1}{\varrho} = 2 \operatorname{cn} \left(\frac{s}{k} \right) .$$

Siccome la superficie Σ ha linee di curvatura isoterme, e tale proprietà si mantiene in metrica non-euclidea, abbiamo: *La superficie delle binor-*

mali della curva Γ (in metrica iperbolica) è una superficie isoterma. Questa è una proprietà caratteristica della nostra curva Γ, come dimostreremo più oltre (vedi n. 7).

5. Conformemente alle osservazioni geometriche del n. 2, diamo ora alla curva Γ una traslazione d'ampiezza variabile w parallelamente all'asse delle y (normalmente ai piani dei circoli). La superficie S generata in questa traslazione, ove si ponga $ku + w = t$, sarà data dalle formole

$$(10) \qquad x = k'u + \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{k' \operatorname{dn} u} - \frac{1}{k'} \mathrm{E}(u) \quad , \quad y = t \quad , \quad z = \frac{1}{\operatorname{dn} u} .$$

Riguardando questa superficie S (cilindro dello spazio euclideo) come appartenente allo spazio iperbolico (1), avremo per il suo elemento lineare

$$(11) \qquad ds'^2 = k^4 \operatorname{sn}^2 u \, du^2 + \operatorname{dn}^2 u \, dt^2 .$$

La sua curvatura *assoluta* K si calcola subito ed è

$$\mathrm{K} = -\frac{1}{k^2} ,$$

indi per la curvatura K_0 *relativa* avremo

$$\mathrm{K}_0 = \mathrm{K} + 1 = -\frac{k'^2}{k^2} .$$

Se calcoliamo altresì i coefficienti

$$\mathrm{D} = \Omega_{11} \quad , \quad \mathrm{D}' = \Omega_{12} \quad , \quad \mathrm{D}'' = \Omega_{22}$$

della seconda forma fondamentale di S, ricorrendo alle formole del § 170, vol. I, delle *Lezioni*, abbiamo

$$(12) \qquad \mathrm{D} = k^2 k' \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \quad , \quad \mathrm{D}' = 0 \quad , \quad \mathrm{D}'' = -k' \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u ,$$

e quindi per l'equazione differenziale delle asintotiche

$$dt^2 - k^2 du^2 = 0 .$$

Le asintotiche di un sistema sono le $t - ku = \text{cost}$, in particolare è asintotica la $v = 0$, e quelle dell'altro sistema sono le $t + ku = \text{cost}$, manifestamente simmetriche delle prime rispetto al piano xz. Per il teorema di Enneper (1) la torsione delle asintotiche, in particolare della curva Γ, è data da

$$\frac{1}{\mathrm{T}} = \sqrt{-\mathrm{H}_0} = \frac{k'}{k} ,$$

il che dimostra nuovamente la prima delle (9).

(1) *Lezioni*, vol. I, pag. 496.

Per ritrovare di nuovo anche la seconda

$$\frac{1}{\varrho} = 2\,\mathrm{cn}\,u\,,$$

basta calcolare, colla formola di Bonnet (1), la curvatura geodetica della $t - ku = 0$, che combina appunto coll'assoluta $\frac{1}{\varrho}$.

6. È stato osservato da Schwarz (*Miscellen*, loc. cit.) che la superficie Σ', coniugata in applicabilità di una superficie minima cerchiata Σ, è un'altra tale superficie minima. Non è senza interesse ricercare la dipendenza fra le formole che dànno le due superficie Σ, Σ' ovvero le due corrispondenti curve a torsione costante Γ, Γ' dello spazio iperbolico. Dimostreremo che il passaggio da Σ a Σ', o da Γ a Γ', si ottiene cangiando il modulo k nel complementare k'.

Prendasi la superficie minima cerchiata Σ, nella quale però converrà ora meglio dare, per ragioni di simmetria, al raggio del parallelo minimo il valore k' anzichè il valore 1. Così, per la formola (6), il ds^2 della Σ sarà dato da

$$(13)\quad ds^2 = \frac{k'^2}{(\mathrm{dn}\,u\,\cosh v + k'\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{senh}\,v)^2}\{(k^2\cosh^2 v + k'^2\,\mathrm{senh}^2 v)\,du^2 + dv^2\}.$$

Considerando la superficie minima cerchiata analoga Σ', ottenuta collo scambio di k con k', avremo per il suo elemento lineare

$$(13')\quad ds'^2 = \frac{k^2}{(\Delta\mathrm{nU}\,\cosh\mathrm{V} + k\,\mathrm{SnU}\,\mathrm{senh\,V})^2}\{(k'^2\cosh^2\mathrm{V} + k^2\,\mathrm{senh}^2\mathrm{V})\,d\mathrm{U}^2 + d\mathrm{V}^2\},$$

ove

$$\mathrm{SnU}\quad,\quad \mathrm{CnU}\quad,\quad \Delta\mathrm{nU}$$

indicano le funzioni ellittiche col modulo complementare k'. Dimostriamo che le due superficie minime Σ, Σ' sono applicabili in guisa che le linee di livello $u = \mathrm{cost}$ (circoli) dell'una diventano sull'altra le linee di pendenza $\mathrm{V} = \mathrm{cost}$ (traiettorie ortogonali dei circoli) e reciprocamente. Per questo diamo le effettive formole di corrispondenza che sono

$$(14)\quad \begin{cases} \mathrm{tgh\,V} = \dfrac{k'\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\quad,\quad \dfrac{1}{\cosh\mathrm{V}} = \dfrac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u} \\ \mathrm{tgh}\,v = \dfrac{k\,\mathrm{SnU}}{\Delta\mathrm{nU}}\quad,\quad \dfrac{1}{\cosh v} = \dfrac{\mathrm{CnU}}{\Delta\mathrm{nU}}. \end{cases}$$

(1) *Lezioni*, vol. I, pag. 183

Da queste si deduce in effetto

$$\frac{dV}{du} = \frac{k'}{\mathrm{cn}\, u} \quad , \quad \frac{dv}{dU} = \frac{k}{\mathrm{Cn}U} \, ,$$

e si verifica subito che i due elementi lineari (13), (13′) si trasformano così l'uno nell'altro (¹).

Le proprietà così verificate per le due superficie minime Σ, Σ' le caratterizzano appunto come coniugate in applicabilità. Notevole è il caso particolare $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dove le due superficie minime Σ, Σ' riescono identiche di forma.

7. Da ultimo veniamo a dimostrare, conformemente a quanto è asserito alla fine del n. 4, che: *La curva Γ dello spazio iperbolico definita dalle equazioni intrinseche* (9) *è l'unica curva a torsione costante di questo spazio, la cui superficie delle binormali è isoterma* (*con linee di curvatura isoterme*). Così verremo a dimostrare nuovamente questa proprietà della curva Γ ed in pari tempo proveremo che essa è caratteristica per la nostra curva.

Nello spazio iperbolico, di curvatura $K = -1$, consideriamo una curva C a torsione costante

$$\frac{1}{T} = a \qquad (a \text{ costante})$$

e la superficie Σ luogo delle sue binormali.

Sulla Σ assumiamo a parametro v l'arco di C ed a parametro u il tratto di generatrice contato a partire da $C(u = 0)$. L'elemento lineare di Σ sarà dato (vedi *Lezioni*, vol. I, pag. 450) da

$$(15) \qquad ds^2 = du^2 + (\cosh^2 u + a^2 \operatorname{senh}^2 u)\, dv^2,$$

sicchè pei coefficienti E, F, G abbiamo qui

$$E = 1 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = \cosh^2 u + a^2 \operatorname{senh}^2 u$$

e quindi i valori dei simboli di Christoffel sono tutti nulli, salvo i due seguenti

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{(1 + a^2) \operatorname{senh} u \cosh u}{\cosh^2 u + a^2 \operatorname{senh}^2 u}$$

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = -(1 + a^2) \operatorname{senh} u \cosh u \, .$$

(¹) Si osservi ancora dalle (14) che il circolo minimo $u = 0$ della Σ si muta sulla Σ' nella curva Γ' a torsione costante non-euclidea.

Consideriamo ancora i coefficienti D , D′ , D″ della seconda forma fondamentale di Σ che saranno [1]

$$(16)\quad D=0\ ,\ D'=\frac{a}{\sqrt{\cosh^2 u+a^2\operatorname{senh}^2 u}}\ ,\ D''=2V\sqrt{\cosh^2 u+a^2\operatorname{senh}^2 u}\ ,$$

dove

$$\frac{1}{\varrho}=2V$$

è una funzione della sola v che rappresenta appunto la prima curvatura, o flessione, di C. Si tratta ora di determinare questa funzione V per modo che la superficie Σ risulti isoterma.

Applicando i risultati esposti nel vol. II delle mie *Lezioni* a pag. 30 [2], si vede essere per ciò necessario e sufficiente che, posto

$$\Gamma=(ED'-FD)\,.\,\mu\ ,\ \Gamma'=\tfrac{1}{2}(ED''-GD)\,.\,\mu\ ,\ \Gamma''=(FD''-GD')\,.\,\mu\,.$$

si possa determinare il moltiplicatore μ in guisa che Γ, Γ', Γ'' soddisfino le equazioni di Codazzi

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Gamma}{\partial v}-\dfrac{\partial\Gamma'}{\partial u}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\Gamma'=0 \\ \dfrac{\partial\Gamma'}{\partial v}-\dfrac{\partial\Gamma''}{\partial u}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\Gamma+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\Gamma''=0. \end{cases}$$

Sostituendo in queste i valori (17) di Γ, Γ', Γ'', coll'osservare le (16), e introducendo come nuova funzione incognita in luogo di μ l'altra

$$M=\log\mu-\tfrac{1}{2}\log(\cosh^2 u+a^2\operatorname{senh}^2 u)\,,$$

le (18) determinano i valori di $\dfrac{\partial M}{\partial u}$, $\dfrac{\partial M}{\partial v}$ secondo le formole seguenti, ove si è posto per brevità

$$V'=\frac{dV}{dv}\ ;$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial u}=-\dfrac{2(1+a^2)\operatorname{senh}u\cosh u}{\cosh^2 u+a^2\operatorname{senh}^2 u}-\dfrac{(1+a^2)\operatorname{senh}u\cosh u\,V^2}{a^2+(\cosh^2 u+a^2\operatorname{senh}^2 u)\,V^2}- \\ \qquad\qquad -\dfrac{aV'}{a^2+(\cosh^2 u+a^2\operatorname{senh}^2 u)\,V^2} \\ \dfrac{\partial M}{\partial v}=\dfrac{a(1+a^2)\operatorname{senh}u\cosh u\,V}{a^2+(\cosh^2 u+a^2\operatorname{senh}^2 u)V^2}-\dfrac{(\cosh^2 u+a^2\operatorname{senh}^2 u)V\,V'}{a^2+(\cosh^2 u+a^2\operatorname{senh}^2 u)V^2}\,. \end{cases}$$

[1] Si consideri che le $v=$ cost sono asintotiche (rette), e si tenga conto delle equazioni di Gauss e di Codazzi.

[2] I teoremi cui ci riferiamo valgono, come facilmente si dimostra, non solo in metrica euclidea ma anche in una metrica generale a curvatura costante.

Basta ora scrivere la condizione d'integrabilità per queste due e si ottiene

$$a(1+a^2)\mathrm{V}\{a^2(\cosh^2 u+\operatorname{senh}^2 u)+(\cosh^2 u-a^2\operatorname{senh}^2 u)\mathrm{V}^2\}+$$
$$+a\mathrm{V}''\{a^2+(\cosh^2 u+a^2\operatorname{senh}^2 u)\mathrm{V}^2\}-2a(\cosh^2 u+a^2\operatorname{senh}^2 u)\mathrm{V}\mathrm{V}'=0,$$

dove $\mathrm{V}''=\frac{d^2\mathrm{V}}{dv^2}$. Siccome V è indipendente da u, questa deve ridursi alla identità

$$\cosh^2 u-\operatorname{senh}^2 u=1.$$

Questo ci dà dapprima le due condizioni per V:

$$\begin{cases}\mathrm{V}''\mathrm{V}^2+(1+a^2)\mathrm{V}(a^2+\mathrm{V}^2)-2\mathrm{V}'^2\mathrm{V}=-a^2\mathrm{V}''\\ \mathrm{V}''\mathrm{V}^2+(1+a^2)\mathrm{V}(1-\mathrm{V}^2)-2\mathrm{V}'^2\mathrm{V}=\mathrm{V}'',\end{cases}$$

le quali equivalgono però all'unica del 1° ordine

$$\mathrm{V}'=\sqrt{(1-\mathrm{V}^2)(\mathrm{V}^2+a^2)}.$$

L'integrale generale di questa, ove si ponga

$$k=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\quad,\quad k'=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

e si includa la costante additiva in v, è dato da

$$\mathrm{V}=\operatorname{cn}\left(\frac{v}{k}\right).$$

Le equazioni intrinseche della curva domandata sono adunque

$$\frac{1}{\mathrm{T}}=a=\frac{k'}{k}\quad,\quad\frac{1}{\varrho}=2\mathrm{V}=2\operatorname{cn}\left(\frac{v}{k}\right),$$

che combinano appunto colle (9), ciò che dimostra il teorema enunciato.

Osserveremo in fine che l'analisi qui adoperata si applica nel medesimo modo per risolvere il problema analogo negli altri spazî a curvatura costante, nulla o positiva; si trovano così i risultati seguenti:

1°. Nell'ordinario spazio euclideo (a curvatura nulla) non esiste alcuna curva reale ed a torsione costante non nulla, la superficie delle cui binormali sia isoterma.

2°. Nello spazio ellittico (a curvatura $\mathrm{K}=+1$) le uniche curve reali di questa specie sono tutte e sole quelle di equazioni intrinseche

$$\frac{1}{\mathrm{T}}=1\quad,\quad\frac{1}{\varrho}=2\operatorname{tg}(cs)\qquad(c\text{ costante}).$$

La superficie delle binormali di queste curve sono particolari rigate a curvatura assoluta nulla.

A questi risultati si collegano altre osservazioni geometriche sulle quali mi propongo di ritornare più tardi.

Meccanica. — *Sulla deformazione di un cilindro di rotazione*. Nota del Corrisp. O. TEDONE.

1. Seguendo le notazioni introdotte in una Nota precedente, chiamiamo h la lunghezza del cilindro ed R il raggio della sua base; scegliamo gli assi coordinati in modo che l'origine sia nel centro di una delle basi e l'asse del cilindro cada sulla parte positiva dell'asse z; e introduciamo coordinate cilindriche con le formole:

$$x = l\cos\psi \quad , \quad y = l\,\mathrm{sen}\,\psi . \tag{1}$$

Il problema della deformazione di un cilindro circolare (di capitale interesse nelle applicazioni pratiche), anche ridotto al caso in cui il cilindro è costituito di materiale isotropo, è un problema notevolmente complicato. Fa eccezione il caso in cui la deformazione è una torsione indipendente dall'angolo ψ e qualche altro caso il cui studio è appunto oggetto principale di questa Nota. Precisamente noi vogliamo dimostrare che il problema della deformazione di un cilindro circolare si risolve facilmente quando la deformazione è indipendente dall'angolo ψ e sulla superficie sono assegnate la componente normale dello spostamento e la componente tangenziale della tensione. Ed, in questa quistione, possiamo anche astrarre dalla deformazione di torsione. Per se stesso il problema può apparire di scarso interesse, però esso può servire utilmente d'intermediario per risolvere il problema della deformazione quando le condizioni in superficie sieno altre.

2. Partiamo dall'osservazione che, come si prova facilmente, i sistemi di formole seguenti ci dànno due sistemi di soluzioni particolari dell'equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo:

$$\begin{cases} u_l = \dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\,kz\,\mathrm{J}_1(kl)\,[(a+d)\,\mathrm{Sen}\,(kz)+(b+c)\,\mathrm{Cos}\,(kz)] + \\ \qquad\qquad + \mathrm{J}_1(kl)\,[a\,\mathrm{Cos}\,(kz)+b\,\mathrm{Sen}\,(kz)]\,, \\ u_z = -\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\,kz\,\mathrm{J}_0(kl)\,[(a+d)\,\mathrm{Cos}\,(kz)+(b+c)\,\mathrm{Sen}\,(kz)] + \\ \qquad\qquad + \mathrm{J}_0(kl)\,[c\,\mathrm{Cos}\,(kz)+d\,\mathrm{Sen}\,(kz)]\,, \\ \theta = \dfrac{2k\mu}{\lambda+3\mu}\,\mathrm{J}_0(kl)\,[(a+d)\,\mathrm{Cos}\,(kz)+(b+c)\,\mathrm{Sen}\,(kz)]\,; \end{cases} \tag{2}$$

$$(3)\quad \begin{cases} u_l = -\frac{1}{2}\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\, kl\, \mathrm{I}_0(kl)\,[(a_1+d_1)\cos(kz)+(b_1-c_1)\,\mathrm{sen}\,(kz)]+ \\ \qquad\qquad +\mathrm{I}_1(kl)\,[a_1\cos(kz)+b_1\,\mathrm{sen}\,(kz)]\,, \\ u_z = -\frac{1}{2}\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\, kl\, \mathrm{I}_1(kl)\,[-(a_1+d_1)\,\mathrm{sen}\,(kz)+(b_1-c_1)\cos(kz)]+ \\ \qquad\qquad +\mathrm{I}_0(kl)\,[c_1\cos(kz)+d_1\,\mathrm{sen}\,(kz)]\,, \\ \theta = \dfrac{k\mu}{\lambda+2\mu}\,\mathrm{I}_0(kl)\,[(a_1+d_1)\cos(kz)+(b_1-c_1)\,\mathrm{sen}\,(kz)]\,, \end{cases}$$

dove u_l ed u_z sono le componenti dello spostamento secondo il raggio vettore l e l'asse z, θ è la dilatazione elementare, λ e μ le costanti di Lamé, $k, a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1$ costanti arbitrarie e k potrebbe essere immaginario, ma noi la supporremo reale. Abbiamo posto, inoltre:

$$(4)\quad \begin{cases} \mathrm{J}_m(l) = \sum_0^\infty{}_i\, (-1)^i \dfrac{\left(\frac{l}{2}\right)^{m+2i}}{i!\,(m+i)!}\quad,\quad \mathrm{I}_m(l) = \sum_0^\infty{}_i\, \dfrac{\left(\frac{l}{2}\right)^{m+2i}}{i!\,(m+i)!}\,, \\ \mathrm{Sen}\, z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}\quad,\quad \mathrm{Cos}\, z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}\,. \end{cases}$$

La superficie del cilindro è composto di tre parti: della superficie laterale e delle due basi. Ora il problema che ci siamo proposti di risolvere si può scomporre in tre parti ciascuna delle quali risolve lo stesso problema quando, su due delle tre parti di cui è composta la superficie, la componente normale dello spostamento e tangenziale della tensione acquistano valori nulli, mentre sull'altra acquistano valori arbitrarii. Passiamo a dare la soluzione di questi tre problemi.

3. Se nelle (2) poniamo $k = \dfrac{k_i}{\mathrm{R}}$ e supponiamo che sia

$$(5)\qquad \mathrm{J}_1(k_i) = 0\,,$$

u_l e la componente

$$\mathrm{T}_z = \mu\left(\frac{\partial u_l}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial l}\right)$$

della tensione secondo l'asse z, ossia tangente alla superficie del cilindro, si annullano per $l = \mathrm{R}$, qualunque sieno le costanti a, b, c, d. Per $z = 0$, invece, si annullerà u_z se, nelle (2), poniamo $c = 0$ e si annullerà la componente della tensione secondo la direzione l, cioè

$$\mathrm{T}_l = -\mu\left(\frac{\partial u_l}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial l}\right)$$

se $b = 0$. Abbiamo così le infinite soluzioni elementari seguenti dell'equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo, ciascuna caratterizzata dalla soluzione k_i della equazione (5) e contenente ancora due costanti arbitrarie:

$$(6)\quad \begin{cases} u_l^{(i)} = \dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\dfrac{k_i}{R}\, z\, J_1\left(k_i\dfrac{l}{R}\right)(a_i+d_i)\,\mathrm{Sen}\left(k_i\dfrac{z}{R}\right) + \\ \qquad\qquad + a_i\, J_1\left(k_i\dfrac{l}{R}\right)\mathrm{Cos}\left(k_i\dfrac{z}{R}\right), \\ u_z^{(i)} = -\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\dfrac{k_i}{R}\, z\, J_0\left(k_i\dfrac{l}{R}\right)(a_i+d_i)\,\mathrm{Cos}\left(k_i\dfrac{z}{R}\right) + \\ \qquad\qquad + d_i\, J_0\left(k_i\dfrac{l}{R}\right)\mathrm{Sen}\left(k_i\dfrac{z}{R}\right). \end{cases}$$

Delle infinite costanti a_i e d_i ci possiamo servire in modo che nella soluzione

$$u_l = \Sigma_i\, u_l^{(i)} \quad , \quad u_z = \Sigma_i\, u_z^{(i)}$$

u_z e $T_l = \mu\left(\dfrac{\partial u_l}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial l}\right)$, per $z = h$, diventino funzioni arbitrarie. Se poniamo i valori di u_z e di T_z per $z = h$ sotto la forma

$$(7)\qquad (u_z)_{z=h} = \Sigma_i\, A_i\, J_0\left(k_i\frac{l}{R}\right) \quad , \quad (T_l)_{z=h} = \Sigma_i\, B_i\, J_1\left(k_i\frac{l}{R}\right)$$

avremo, per determinare le costanti a_i e d_i, le equazioni:

$$(8)\quad \begin{cases} -(a_i+d_i)\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}k_i\dfrac{h}{R}\,\mathrm{Cos}\left(k_i\dfrac{h}{R}\right) + d_i\,\mathrm{Sen}\left(k_i\dfrac{h}{R}\right) = A_i, \\ (a_i+d_i)\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\left[2k_i\dfrac{h}{R}\,\mathrm{Cos}\left(k_i\dfrac{h}{R}\right) + \mathrm{Sen}\left(k_i\dfrac{h}{R}\right)\right] + \\ \qquad\qquad + (a_i - d_i)\,\mathrm{Sen}\left(k_i\dfrac{h}{R}\right) = \dfrac{R}{\mu k_i}\,B_i. \end{cases}$$

Soltanto c'è da osservare che le (7) richiedono che sia:

$$\int_0^R l\,(u_z)_{z=h}\,dl = 0 \quad , \quad (T_l)_{z=h,\,l=0} = 0.$$

In quanto alla seconda condizione essa deve essere supposta soddisfatta dai dati; soddisferemo, invece, anche alla prima sostituendo per u_z un'espressione della forma

$$u_z = A_0\, z + \Sigma_i\, u_z^{(i)},$$

dove A_0 è allora una costante convenientemente determinata.

Cambiando, nella soluzione trovata, z in $h - z$ si trova l'altra soluzione per cui lo spostamento normale e la componente tangenziale della tensione si annullano sulla superficie cilindrica e sulla base $z = h$, mentre sull'altra base acquistano valori arbitrarii.

4. Dalle (3) ricaviamo, in modo analogo, la soluzione del problema nel caso in cui lo spostamento normale e la tensione tangenziale si annullano sulle due basi, mentre acquistano valori arbitrarii sulla superficie cilindrica. Se, infatti, nelle (3) poniamo $b_1 = c_1 = 0$, $k = \frac{m\pi}{h}$, dove m è un intero arbitrario, troviamo infinite soluzioni elementari per cui sulle due basi si annullano u_z e T_l. Esse hanno la forma:

$$(9)\quad \begin{cases} u_l^{(m)} = \left[-\frac{1}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(a_m + d_m)\frac{m\pi l}{h} I_0\left(\frac{m\pi l}{h}\right) + \right. \\ \qquad\qquad \left. + a_m I_1\left(\frac{m\pi l}{h}\right)\right] \cos\frac{m\pi z}{h}, \\ u_z^{(m)} = \left[\frac{1}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(a_m + d_m)\frac{m\pi l}{h} I_1\left(\frac{m\pi l}{h}\right) + \right. \\ \qquad\qquad \left. + d_m I_0\left(\frac{m\pi l}{h}\right)\right] \operatorname{sen}\frac{m\pi z}{h}. \end{cases}$$

Componendo con queste soluzioni elementari l'altra più generale:

$$u_l = \Sigma_m u_l^{(m)} \quad , \quad u_z = \Sigma_m u_z^{(m)}$$

si può poi in essa disporre delle costanti che restano ancora arbitrarie in modo che sulla superficie laterale del cilindro u_l e T_z acquistino dati valori. Se fra 0 e h i valori di u_l e di T_z si sono posti sotto la forma:

$$u_l = \Sigma_m C_m \cos\frac{m\pi z}{h} \quad , \quad T_z = \mu\Sigma D_m \operatorname{sen}\frac{m\pi z}{h}$$

dev'essere:

$$(10)\quad \begin{cases} -\frac{1}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(a_m + d_m)\frac{m\pi R}{h} I_0\left(\frac{m\pi R}{h}\right) + a_m I_1\left(\frac{m\pi R}{h}\right) = C_m, \\ \frac{1}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(a_m + d_m)\left\{\frac{m\pi R}{h}\left[I_0\left(\frac{m\pi R}{h}\right) + I_1'\left(\frac{m\pi R}{h}\right)\right] + \right. \\ \qquad \left. + I_1\left(\frac{m\pi R}{h}\right)\right\} - (a_m - d_m) I_1\left(\frac{m\pi R}{h}\right) = \frac{h}{m\pi} D_m. \end{cases}$$

Sommando le tre soluzioni così trovate si trova la deformazione più generale di rotazione per un cilindro di rotazione, tenendo conto che, in questo caso, si sa determinare anche la torsione.

Per convincersi che la nostra soluzione è la più generale basta osservare che essa contiene sei funzioni arbitrarie e cioè i valori dello spostamento normale e della tensione tangenziale sulle due basi e sulla superficie cilindrica. Di queste funzioni arbitrarie, ossia delle costanti arbitrarie che compaiono nelle nostre formole finali, ce ne possiamo servire per soddisfare sulla superficie del cilindro a condizioni diverse da quelle indicate.

5. Cerchiamo di servirci della soluzione ottenuta per risolvere il problema della deformazione del cilindro nel caso in cui sulla base $z = 0$ si annulla lo spostamento, sulla superficie laterale si annulli la tensione, mentre sulla base $z = h$ sono applicate date tensioni dirette secondo l'asse z. Indichiamo perciò le costanti che compaiono nella soluzione che si deduce dalla (6) mutando z in $h - z$ con gli stessi simboli con cui sono indicate nelle (6) stesse munite di un accento. Dobbiamo allora soddisfare alle condizioni seguenti:

$$
(11)\quad \begin{cases}
-\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(a_i'+d_i')\,k_i\dfrac{h}{R}\operatorname{Cos}\left(k_i\dfrac{h}{R}\right)+d_i'\operatorname{Sen}\left(k_i\dfrac{h}{R}\right)=0\ ,\ A_0'=0 \\
\frac{1}{2}\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(a_m+d_m)\left\{\dfrac{m\pi R}{h}\left[I_0\left(\dfrac{m\pi R}{h}\right)+I_1'\left(\dfrac{m\pi R}{h}\right)\right]+I_1\left(\dfrac{m\pi R}{h}\right)\right\}- \\
\qquad -(a_m-d_m)\,I_1\left(\dfrac{m\pi R}{h}\right)=0, \\
\Sigma_i J_1\left(k_i\dfrac{l}{R}\right)\left\{a_i+\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\dfrac{h}{R}k_i(a_i'+d_i')\operatorname{Sen}\left(k_i\dfrac{h}{R}\right)+a_i'\operatorname{Cos}\left(k_i\dfrac{h}{R}\right)\right\}= \\
\qquad =\Sigma_m\left[\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\dfrac{m\pi l}{h}(a_m+d_m)\,I_0\left(\dfrac{m\pi l}{h}\right)-a_m I_1\left(\dfrac{m\pi l}{h}\right)\right] \\
\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}(a_i+d_i)\left[2k_i\dfrac{h}{R}\operatorname{Cos}\left(k_i\dfrac{h}{R}\right)+\operatorname{Sen}\left(k_i\dfrac{h}{R}\right)+\right. \\
\qquad \left.+(a_i-d_i)\operatorname{Sen}\left(k_i\dfrac{h}{R}\right)\right]=0.
\end{cases}
$$

La prima e la terza dicono che u_z ed u_l si annullano per $z = 0$, la seconda e la quarta che la componente tangenziale della tensione si annulla sulla superficie cilindrica e sulla base $z = h$. La prima, la seconda e la quarta ci permettono di esprimere d_i', d_m e d_i rispettivamente per a_i', a_m, a_i; dalla terza deduciamo una combinazione lineare di a_i ed a_i' espressa per mezzo di tutte le costanti a_m; sicchè restano da determinare le a_m e le a_i, ovvero le a_i', di cui ci possiamo servire per assegnare valori arbitrarii alla tensione normale sulla superficie laterale del cilindro e sulla base $z = h$. In questa Nota non vogliamo andare oltre nella discussione di queste equazioni. Vogliamo soltanto osservare che la terza delle equazioni precedenti non può essere soddisfatta in generale. Si toglie questo inconveniente introducendo in u_l un termine della forma $B_0 l$.

6. Cerchiamo cosa diventa la soluzione quando R è infinitamente piccolo rispetto ad h. Le prime delle (11) richiedono che sia $d'_i = 0$ e quindi anche $a'_i = 0$; similmente le ultime richiedono che sia $a_i = d_i = 0$; dalle seconde abbiamo $a_m = d_m = 0$ e restano soddisfatte le altre identicamente. Nella soluzione rimanente

$$u_l = B_0 l \quad , \quad u_z = A_0 z$$

poichè le costanti A_0 e B_0 devono essere scelte in modo che la tensione normale alla superficie laterale sia nulla, dev'essere

$$B_0 + \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} A_0 = 0.$$

Se quindi si vuole che sia $u_l = 0$, per $z = 0$, deve porsi $A_0 = B_0 = 0$. Togliendo questa restrizione e supponendo che z e $z - h$ non sieno infinitesimi, si ottiene la soluzione del de Saint-Venant.

Chimica. — *Sulla reazione Angeli-Rimini delle aldeidi.* Nota del Corrisp. L. Balbiano.

In risposta alle mie osservazioni [1] fatte alla critica di un mio collaboratore sull'interpretazione della costituzione dei composti di disidratazione dei glicoli che si ottengono coll'ossidazione aceto-mercurica dell'anetolo, il collega prof. Angeli fa alcuni appunti [2] ai quali rispondo con qualche ritardo perchè ho voluto corredare la risposta coi necessarî fatti sperimentali.

Nella prima parte della sua Nota il prof. Angeli ripete le stesse considerazioni che mi sono fatto io quando dai risultati analitici ho stabilito che i composti ottenuti dai glicoli differenziavano da essi per una molecola di acqua in meno, e se allora ho dato al meccanismo dell'eliminazione quella interpretazione, mi indusse a ciò il *fatto sperimentale* che quei composti, dando la reazione Angeli-Rimini coll'acido del Piloty, dovevano essere classificati per aldeidi e non per chetoni e qualunque chimico avrebbe allora data la stessa interpretazione mia.

Nella seconda parte il prof. Angeli descrive sommariamente alcune esperienze eseguite sul desossibenzoino C_6H_5-CH_2-CO-C_6H_5, sul benzoino C_6H_5-CHOH-CO-C_6H_5 e sul benzile C_6H_5-CO-CO-C_6H_5, atte a dimostrare che l'eccesso di alcali adoperato nella reazione coll'acido del Piloty reagirebbe alla sua volta sul chetone formando aldeide benzoica, la quale reagendo coll'acido del Piloty darebbe origine all'acido benzidrossamico, che si isola dal sale di rame coll'acido cloridrico diluito. Secondo il prof. Angeli la reazione aldeidica da me accertata nei diversi prodotti di disidratazione

[1] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XX, serie 5ª, 2° sem., pag. 245.
[2] Id. id., pag. 447.

dei glicoli sarebbe generata da un'aldeide prodottasi per azione dell'eccesso di alcali sul chetone primo prodotto di disidratazione, perciò nel caso del glicole dell'anetolo, sarebbe prodotta dall'aldeide anisica e così per gli altri glicoli sperimentati. Questa supposizione del collega, non corredata da fatti sperimentali quantitativi, è però contraria ai dati sperimentali da me pubblicati, perchè la composizione del sale di rame che io ho trovato nel caso del glicole dell'anetolo è 23,09-23,77 % Cu e 5,33-5,66 % N, il calcolato essendo per $CH_3O\text{-}C_6H_4\text{-}C_3H_4NO_2Cu$ 24,77 % Cu — 5,46 % N, mentre per il sale ramico dell'acido anisidrossamico $CH_3O\text{-}C_6H_4\text{-}C\langle^{NO}_{O}\rangle Cu$ si calcola Cu % 27,8 N % 6,12, cioè un tenore considerevolmente più elevato di rame e di azoto di quello datomi dall'esperimento.

Ho perciò, come avevo annunziato nella mia Nota dell'agosto passato, ripetuto le mie esperienze sui due chetoni isomeri

$C_6H_5\text{-}CO\text{-}CH_2\text{-}CH_3$ fenil-etilchetone e $C_6H_5\text{-}CH_2\text{-}CO\text{-}CH_3$ benzil-metil-chetone

ed ho ottenuto i seguenti risultati:

Benzilmetilchetone. — Il prodotto ritirato dal Kahlbaum, si ridistillò frazionatamente e si adoperò per le esperienze la frazione bollente 210-214°, che rappresenta all'incirca i $^3/_4$ del prodotto commerciale.

Gr. 1,34 chetone, disciolti in 10 a 15 cm.^{3} di alcool assoluto, si addizionarono di 10 cm.^{3} di soluzione acquosa 2 n. di KOH, e quindi poco a poco ed agitando si aggiunsero gr. 1,77 di acido benzol-solfin-idrossilaminico di Piloty, indi si lasciò alla temperatura ambiente dalle ore 16 alle 9 dell'indomani. Si distillò l'alcool a bagno maria, ed il residuo lattiginoso per separazione del chetone che non ha reagito, diluito con 2 a 3 vol. di acqua, si estrasse con etere.

La parte acquosa, scacciato l'etere disciolto per riscaldamento a bagno maria, si acidificò con leggero eccesso di acido acetico; il liquido divenne lattiginoso, e si addizionò di soluzione satura a freddo di acetato ramico. Si ottenne un precipitato fioccoso verde, che lasciato per 24 ore alla temperatura ambiente, si filtrò, si lavò con acqua sino ad eliminazione dell'eccesso di acetato ramico, indi con alcool ed infine con etere.

Il peso di questo sale disseccato nel vuoto sull'acido solforico è di gr. 0,135. In altre preparazioni, fatte nelle stesse condizioni di tempo e di temperatura, con 2 gr. di chetone e le corrispondenti quantità di acido del Piloty e d'idrato potassico le quantità di composto ramico oscillarono fra gr. 0,2 e 0,05.

Il sale di rame si presenta sotto forma di una polvere microcristallina, di color verde-cromo, praticamente insolubile nell'acqua e nell'alcool; tuttavia

un po' solubile in questi veicoli, perchè si ha dal contatto di essi un soluto che si colora in violetto col cloruro ferrico. Riscaldato lentamente deflagra con grande vivacità, per cui non si può determinare il quantitativo di rame per calcinazione, ed una determinazione di azoto andò perduta per decomposizione troppo rapida. Per la determinazione del rame si operò nel modo seguente:

Gr. 0,4685 di sale disseccato nel vuoto sull'acido solforico fino a costanza di peso, si agitarono in imbuto a robinetto con 15 a 20 cm.^{3} di acqua acidulata con acido solforico al 15 %, e con 90 a 100 cm.^{3} di etere, fino a che la soluzione del sale fu completa. Nello strato acquoso, riunite le acque di lavatura, si precipitò coll'idrato sodico l'ossido di rame, che lavato, disseccato e calcinato pesava gr. 0,1394, ossia 23,7 % di Cu.

Il calcolato per $C_9H_9NO_2Cu$ è 28,04 % Cu
per $C_9H_9NO_2Cu.2H_2O$ 24,1 » »

In altra porzione si determinò l'acqua ed il rame.

Gr. 0,3356 sale disseccato nel vuoto sull'acido solforico vennero riscaldati lentamente e gradatamente in stufa a temperature crescenti fra 100°-170°, fino a che a questo limite di temperatura si avesse due pesate costanti nell'intervallo di tre ore di riscaldamento. La perdita di peso fu di gr. 0,0471 ossia 14,03 %.

Il calcolato per $C_9H_9NO_2Cu.2H_2O$ è 13,87 % H_2O.

Inoltre gr. 0,2871 dettero col trattamento sudescritto gr. 0,1000 di CuO ossia 27.8 % di Cu — Calcolato 28,04.

Da questi dati mi ritengo autorizzato a concludere che il sale ramico è rappresentato dalla formola $C_9H_9NO_2Cu.2H_2O$ e non ha la composizione $C_7H_5NO_2Cu$ che richiede Cu % 32,00, o come si vedrà in seguito la comp. $(C_7H_6NO_2)^2Cu$ che richiede Cu % 18,93.

L'evaporazione dell'etere lascia l'acido libero sotto forma di una massa cerosa colorata in rosso-bruno che per soggiorno in essiccatore diventa più concreta. Si scioglie un po' nell'acqua e la soluzione dà intensa colorazione rosso-viola col cloruro ferrico. Si trattò la massa con acqua (circa gr. 0,2 con 2 cm.^{3} di acqua) lasciandola digerire alla temperatura ordinaria; il filtrato, *incoloro*, svaporato nel vuoto lasciò un tenue residuo cristallino che col disseccamento sull'acido solforico nel vuoto si colorò in giallo-rosso. Questo residuo del peso di 1 a 2 mg. al massimo, fuse completamente a 86-90° in un liquido rosso, e dà sempre, trattato con acqua, una soluzione che col cloruro ferrico si colora intensamente in rosso-viola.

L'acido benzidrossamico è descritto nel Beilstein come cristallizzato in lamine o tavole fusibili a 124-125°, e dal prof. Rimini col punto di fusione 131-132°. Ho preparato per instituire esperienze di confronto, l'acido benzi-

drossamico secondo le prescrizioni del prof. Rimini (1), variando solo la quantità di acido acetico adoperata per neutralizzare l'alcalinità della massa dopo la reazione: mentre egli neutralizza solamente, io ho reso acido con un leggero eccesso, perchè lasciando depositare il sale ramico con eccesso di acetato ramico, questo eccesso si trovi sempre in presenza di acido acetico, per impedire la formazione di acetati basici insolubili.

Il sale di rame dell'acido benzidrossamico è rappresentato dalla formola $\left(C_6H_5-C\begin{matrix}NO\\OH\end{matrix}\right)^2Cu$, perchè alla determinazione del rame dette il seguente risultato.

Gr. 0,1345 sale disseccato fino a costanza di peso nel vuoto sull'acido solforico dettero alla calcinazione gr. 0,0318 di CuO, per cui in 100 p.

	Trovato	Calcolato
Cu	18,88	18,93

È una polvere micro-cristallina di color azzurro-chiaro, che riscaldata lentamente si decompone senza deflagrazione. L'acido libero cristallizza dall'acqua in cristalli aghiformi arborescenti fusibili a 126-127°.

Il *fenil-etilchetone* trattato nelle stesse condizioni di alcalinità coll'acido del Piloty non dà la minima formazione di composto idrossamico come prevedevo nella Nota stampata qualche mese fa in questi Rendiconti.

Tanto l'anisilmetilchetone ottenuto per disidratazione del glicole dell'anetolo, quanto il benzil-metilchetone non dànno composto ramico che si colori in rosso-viola col percloruro di ferro, quando invece di adoperare l'acido del Piloty e sovrasaturarlo di alcali, si adoperi il suo sale sodico, preparato colle quantità stechiometriche di etilato sodico e soluzione alcoolica dell'acido libero, e quindi la reazione del collega Angeli può sempre essere impiegata come diagnostica delle aldeidi. Se invece la reazione si fa nelle condizioni di alcalinità adottate dal prof. Rimini, alcuni chetoni possono dare composti ramici che si colorano in rosso-viola col cloruro ferrico e quindi confondersi colle aldeidi.

Non sono poi d'accordo sul modo d'interpretare l'azione dell'eccesso di alcali sui chetoni proposto dal collega Angeli, od almeno le sue esperienze descritte troppo sommariamente non mi dànno la convinzione che fra i prodotti dell'azione degli alcali sui chetoni sperimentati si trovi l'acido benzidrossamico. Le esperienze su descritte sul benzil-metilchetone mi dimostrano che il sale di rame ottenuto non è il sale di rame dell'acido benzidrossamico sia per la composizione sia per le proprietà fisiche. Perciò mi pare

(1) Gazz. chim ital. T. 31, II, 1901, pag. 86.

più conforme ai fatti osservati l'interpretazione proposta nella mia Nota citata, che cioè coll'acido di Piloty reagisca la forma enolica del chetone

$$R-CH=C(OH)-CH_3$$

forma enolica che si produce per azione dell'alcali, perchè il chetone ottenuto dal glicole dell'anetolo, come il benzil-metilchetone non decolorano la prima goccia di soluzione $\frac{N}{10}$ di bromo (1). Tale forma enolica non pare prodursi coi chetoni $R-CO-CH-CH_3$, e quindi la mancanza della formazione del composto nitrossilico che produce il composto ramico insolubile.

Meccanica. — *Sul principio di reciprocità.* Nota di Gustavo Colonnetti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Il teorema che qui mi propongo di esporre può, sotto un certo aspetto, considerarsi come una particolare forma, nuova s'io non m'inganno, di quel principio di reciprocità che occupa meritatamente, nella teoria dell'elasticità, uno dei più cospicui posti, sia per l'elegante semplicità che gli è caratteristica, sia ancora per la meravigliosa abbondanza dei problemi nei quali esso trova utile applicazione.

Sotto questa nuova sua forma, esso riduce, in ogni caso, il problema della ricerca delle caratteristiche della sollecitazione relativa ad una data sezione di un sistema elastico (ovvero della reazione di un dato suo vincolo) prodotta da una qualsiasi condizione di carico, al problema, sempre più semplice, dell'analisi delle variazioni di configurazione di cui lo stesso sistema divien suscettibile dopo che in esso siasi praticato un conveniente taglio; applicato al caso di un'unica forza esterna concentrata ed unitaria, esso potrebbe assumersi come la logica base di tutta quanta la teoria dei diagrammi d'influenza delle tensioni elastiche.

A questa teoria le cui varie parti vengon di solito trattate coi metodi i più disparati, esso potrebbe conferire quella medesima omogeneità e semplicità che, nella teoria dei diagrammi d'influenza delle deformazioni, si ottiene mediante l'applicazione diretta del noto e geniale enunciato che, dello stesso principio, venne dato dal Maxwell.

In un qualsiasi sistema elastico, comunque vincolato, in equilibrio sotto l'azione di forze date, si può sempre immaginare praticato un taglio in modo

(1) Vedi Hurt H. Meyer. Liebig's Ann. 380, 1911, 212.

affatto arbitrario senza che perciò venga ad essere in alcun modo alterato lo stato di equilibrio, purchè alle due faccie del taglio si intendano applicate due distribuzioni continue di tensioni, equivalenti alle tensioni elastiche che, prima del taglio, si trasmettevano nell'interno del sistema attraverso alle faccie stesse.

Immaginiamo di far subire alle due faccie del taglio uno spostamento relativo infinitesimo. Il sistema tagliato può, durante una tale variazione di configurazione, a seconda dei casi e specialmente in relazione col grado suo di connessione, comportarsi in due modi ben distinti. Può accadere cioè che lo spostamento relativo anzidetto non richieda per essere realizzato se non semplici moti rigidi (compatibili coi vincoli che, malgrado il taglio, si intendono conservati) del sistema o anche soltanto di qualche sua porzione. Può avvenire invece che un tale spostamento relativo non possa prodursi senza una concomitante deformazione elastica vera e propria del sistema tagliato o almeno di qualche sua parte (1).

Nel primo caso il sistema deve (in vista della piccolezza degli spostamenti), ritenersi in equilibrio nella nuova sua configurazione sotto l'azione delle stesse forze esterne date e delle medesime distribuzioni di tensioni sopra definite. Nel secondo caso invece il sistema, per essere mantenuto in equilibrio nella sua nuova configurazione sotto l'azione delle solite forze esterne, richiede ovviamente una variazione delle dette due distribuzioni di tensioni, variazione che noi riterremo a sua volta infinitesima e tale che su elementi corrispondenti (cioè primitivamente coincidenti) delle due faccie, le tensioni applicate, già eguali e contrarie, si conservino eguali e contrarie.

La variazione di configurazione così definita è in ogni caso da considerarsi come *impossibile* pel sistema dato nel suo insieme; e precisamente è da considerarsi come *incongruente* se il taglio è stato praticato per modo che ne risulti alterato il grado di connessione del sistema, come congruente ma *incompatibile coi vincoli* se si è fatto coincidere il taglio colla superficie di separazione del sistema da uno o da parecchi dei corpi che lo vincolano. Essa variazione è però, nelle ipotesi fatte, evidentemente *equilibrata* nel senso che le componenti di tensione che la caratterizzano, soddisfano alle equazioni generali dell'equilibrio in tutti quei campi, così interni che superficiali, del sistema dato, nei quali la forza esterna è esplicitamente data; ne segue che, mentre nel primo caso l'energia elastica o lavoro di deforma-

(1) Non sarebbe difficile mettere in relazione questa distinzione dei casi possibili in due diverse categorie, con un'altra che, nella Scienza delle Costruzioni è fondamentale. Si potrebbe infatti dimostrare che si verifica la prima ipotesi sempre quando la risultante delle tensioni elastiche che, nel sistema dato, si trasmettono attraverso la sezione considerata, è staticamente determinata. Si avvera per contro la seconda ipotesi ogniqualvolta quella risultante non è suscettibile di esser determinata col solo sussidio delle leggi della statica dei corpi rigidi.

zione Φ si mantiene costante durante la variazione di configurazione, nel secondo essa subisce una variazione positiva infinitesima del secondo ordine (1). Nell'un caso, come nell'altro, la variazione prima di quell'energia elastica dev'essere nulla:

$$\delta\Phi = 0 .$$

Se pertanto, indicati con:

S lo spazio (connesso) occupato dal sistema,
σ la superficie che lo limita,
σ' e σ'' rispettivamente le due faccie del taglio,
$\Sigma = \sigma + \sigma' + \sigma''$ la superficie totale del sistema tagliato,
$\mathbf{F}$ la forza esterna riferita all'unità di massa, e $\mathbf{F}_\sigma$ la pressione riferita alla unità di superficie, agenti nei singoli punti rispettivamente interni e superficiali del sistema,
$\mathbf{s}$ lo spostamento di un punto qualunque P del sistema stesso, prodotto dalla ipotetica variazione di configurazione,

si applica a tale variazione di configurazione (da considerarsi come possibile, cioè congruente e compatibile coi vincoli, per quanto non più equilibrata, pel sistema *tagliato* e sollecitato, oltrechè dalle forze esterne esplicitamente date, anche dalle due *primitive* distribuzioni di tensioni sulle due faccie del taglio, riguardate esse pure come forze esterne costanti) il noto principio dei lavori virtuali, si ottiene (2):

$$\text{(I)} \qquad \int_S \mathbf{F} \times \mathbf{s}\, dS + \int_\Sigma \mathbf{F}_\sigma \times \mathbf{s}\, d\sigma = -\delta\Phi = 0$$

(1) Rispetto ad una tale variazione di configurazione l'energia elastica Φ del sistema dato è infatti, in questo secondo caso, minima. Del contrastato rigore di questa proposizione, dovuta com'è noto al Menabrea, io mi sono occupato in una mia recentissima Memoria su *L'equilibrio elastico dal punto di vista energetico* (Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino, serie II, tom. LXII, pag. 479). In quell'occasione ho creduto opportuno escludere dalle mie considerazioni quelle particolari variazioni di configurazione per le quali si annulla, oltre alla prima, anche la variazione seconda dell'energia elastica: cioè addirittura (tenuta presente la natura quadratica della funzione) la sua variazione totale: e ciò malgrado che, nelle applicazioni, della variazione seconda e del suo segno non si tenga notoriamente conto veruno. Rinunziando però ad una tale restrizione, l'equazione (15)

$$\delta^2\Phi = 0$$

della citata mia Memoria vale in un campo assai più generale di quello allora definito e, pur continuando ad esprimere, nel caso particolare dei stesimi iperstatici, le note leggi dell'equilibrio elastico, viene ad includere in sè, nella sua espressione più generale, la legge fondamentale in base alla quale, per l'equilibrio dei sistemi elastici (siano essi staticamente determinati od iperstatici, poco importa) debbono essere soddisfatte quelle stesse equazioni che regolano l'equilibrio dei sistemi rigidi.

(2) Uso qui le notazioni proposte dai professori C. Burali-Forti e R. Marcolongo, nei loro *Elementi di Calcolo Vettoriale* (Bologna 1909 e Parigi 1910).

ove il secondo integrale equivale alla somma

$$\int_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} \times \mathbf{s}\, d\sigma + \int_{\sigma'} \mathbf{F}_{\sigma'} \times \mathbf{s}'\, d\sigma' + \int_{\sigma''} \mathbf{F}_{\sigma''} \times \mathbf{s}''\, d\sigma''$$

ovvero anche, visto che in punti corrispondenti di σ' e di σ'' è sempre $\mathbf{F}_{\sigma'} = -\mathbf{F}_{\sigma''}$, all'altra:

$$\int_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} \times \mathbf{s}\, d\sigma + \int_{\sigma'} \mathbf{F}_{\sigma'} \times (\mathbf{s}' - \mathbf{s}'')\, d\sigma'$$

nella quale compare in evidenza il vettore $\mathbf{s}' - \mathbf{s}''$ spostamento relativo del punto generico della faccia σ' rispetto al punto suo corrispondente sulla faccia σ''.

Nell'ipotesi che le due faccie in questione non abbiano subìto, durante la nota variazione di configurazione, alcuna deformazione (cioè mutamento alcuno di forma nè di dimensioni), ma si siano soltanto spostate nello spazio, il loro moto relativo, per la supposta sua piccolezza, può notoriamente assimilarsi ad un moto elementare elicoidale, cioè può considerarsi come risultante della sovrapposizione di una rotazione elementare di ampiezza ω attorno ad una data retta r come asse, e di una traslazione elementare di ampiezza ε parallelamente a quella medesima retta.

Indicato pertanto con O un punto qualsiasi dell'asse r del moto relativo, e con $\mathbf{k}$ un vettore unitario diretto parallelamente a questo asse, è lecito porre:

$$\mathbf{s}' - \mathbf{s}'' = \varepsilon\mathbf{k} + \omega\mathbf{k} \wedge (\mathrm{P} - \mathrm{O});$$

con che la (I) diviene:

$$\text{(II)} \qquad \int_{\mathrm{S}} \mathbf{F} \times \mathbf{s}\, d\mathrm{S} + \int_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} \times \mathbf{s}\, d\sigma + \varepsilon\mathbf{k} \times \int_{\sigma'} \mathbf{F}_{\sigma'}\, d\sigma' + \\ + \omega\mathbf{k} \times \int_{\sigma'} (\mathrm{P} - \mathrm{O}) \wedge \mathbf{F}_{\sigma'}\, d\sigma' = 0.$$

Noi scriveremo più brevemente:

$$\text{(II')} \qquad \int_{\mathrm{S}} \mathbf{F} \times \mathbf{s}\, d\mathrm{S} + \int_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} \times \mathbf{s}\, d\sigma + \varepsilon\mathbf{k} \times \mathbf{F}^{*}_{\sigma'} + \omega\mathbf{k} \times \mathbf{M}^{*}_{\sigma'} = 0,$$

indicando con

$$\mathbf{F}^{*}_{\sigma'} = \int_{\sigma'} \mathbf{F}_{\sigma'}\, d\sigma'$$

e con

$$\mathbf{M}^{*}_{\sigma'} = \int_{\sigma'} (\mathrm{P} - \mathrm{O}) \wedge \mathbf{F}_{\sigma'}\, d\sigma'$$

rispettivamente la risultante delle tensioni elastiche che nello stato di equilibrio del sistema dato si trasmettono attraverso il taglio, ed il vettore momento dello stesso sistema di tensioni rispetto al punto O.

Se, come caso particolare, il moto relativo di σ' rispetto a σ'' si riduce ad una semplice traslazione di ampiezza unitaria in direzione negativa

$$(\varepsilon = -1\ ,\ \omega = 0)\ ,$$

si trova:

$$\text{(III)} \qquad \int_S \mathbf{F} \times \mathbf{s}\, dS + \int_\sigma \mathbf{F}_\sigma \times \mathbf{s}\, d\sigma = \mathbf{k} \times \mathbf{F}^*_{\sigma'}\ .$$

Similmente nell'ipotesi che il moto relativo in questione consti di una semplice rotazione di ampiezza unitaria nel senso delle rotazioni negative

$$(\varepsilon = 0\ ,\ \omega = -1)\ ,$$

si ottiene:

$$\text{(IV)} \qquad \int_S \mathbf{F} \times \mathbf{s}\, dS + \int_\sigma \mathbf{F}_\sigma \times \mathbf{s}\, d\sigma = \mathbf{k} \times \mathbf{M}^*_{\sigma'}\ .$$

Di qui il teorema:

« La componente secondo una data direzione (ovvero: il momento rispetto ad un dato asse), della forza interna che, in un sistema elastico in equilibrio sotto l'azione di forze date, si trasmette attraverso ad una data sezione, è, misurata dal medesimo numero che misura il lavoro che eseguirebbero le dette forze qualora, tagliato il sistema secondo la data sezione, si costringessero le due faccie del taglio ad una traslazione relativa, unitaria e negativa, nella direzione prescelta (ovvero: ad una rotazione relativa, pure unitaria e negativa, attorno all'asse prescelto) [1] ».

Nel campo delle applicazioni ha una speciale importanza il caso particolarissimo in cui il sistema trovasi sollecitato soltanto da un'unica forza esterza $\mathbf{P}$ che si suppone concentrata e di grandezza unitaria; denotando

[1] Le formole (III) e (IV) e, con esse, l'enunciato che da esso deriva, possono essere ricavate con procedimenti diretti, a volte anche assai semplici, nei varî casi particolari nei quali sono suscettibili di applicazione. E precisamente esse possono dedursi nei casi staticamente determinati.

Direttamente dalle equazioni generali dell'equilibrio dei sistemi rigidi; un'opportuna applicazione del teorema di Betti condurrà invece ad una dimostrazione valida nei casi iperstatici.

È anzi, a questo proposito, da rilevarsi che precisamente all'uso di ricorrere, a seconda dei casi, all'uno o all'altro di questi procedimenti speciali, devesi attribuire la consueta separazione della teoria dei diagrammi d'influenza delle tensioni elastiche in due parti fra loro indipendenti (e riguardanti l'una gli sforzi staticamente determinati l'altra i soli sforzi iperstatici), separazione che, solo dal punto di vista didattico, sembra a chi scrive, giustificabile.

allora con $\mathbf{s}_p$ il vettore spostamento del punto d'applicazione P della forza nella solita variazione di configurazione, le (III) e (IV) divengono rispettivamente, a mezzo di un semplice passaggio al limite:

(III′) $$\mathbf{P} \times \mathbf{s}_p = \mathbf{k} \times \mathbf{F}^*_{\sigma'}$$

e

(IV′) $$\mathbf{P} \times \mathbf{s}_p = \mathbf{k} \times \mathbf{M}^*_{\sigma'}$$

mentre il teorema sopra enunciato assume la forma:

« La componente secondo una data direzione (ovvero: il momento ri-
« spetto ad un dato asse), della forza integra che si trasmette attraverso
« ad una data sezione di un sistema elastico in equilibrio sotto l'azione di
« una sollecitazione esterna unitaria applicata in un punto generico P in
« direzione arbitraria, è, in grandezza, eguale allo spostamento che il
« punto P subirebbe nella stessa direzione qualora, tagliato il sistema se
« condo la data sezione, si costringessero le due faccie del taglio ad una
« traslazione relativa, unitaria e negativa, nella direzione prescelta (o rispet
« tivamente: ad una rotazione relativa, pure unitaria e negativa, attorno
« all'asse prescelto) ».

Matematica. — *Sur les transformations des surfaces algébriques laissant invariant un système continu de courbes.* Nota di Lucien Godeaux, presentata dal Corrisp. F. Enriques.

1. MM. Enriques et Fano ont établi naguère que si une surface algébrique possède une transformation projective non périodique en elle-même, elle est rationnelle ou réglée. Ce théorème permet d'affirmer qu'une surface algébrique possédant une transformation birationnelle non périodique en elle-même, laissant invariant un système linéaire de courbes de dimension >1, est rationnelle ou appartient à la classe des surfaces réglées (car au moyen du système linéaire invariant, ou d'un multiple convenable de ce système, on est ramené à une surface pour laquelle la transformation devient une transformation projective). On peut se demander s'il est possible de caractériser les surfaces qui admettent una transformation birationnelle non périodique en elle-même, laissant invariant, non plus un système linéaire de courbes, mais un système continu. La réponse est affirmative et on arrive précisément au théorème suivant:

Si une surface algébrique possède une transformation birationnelle non périodique en elle-même, T *laissant invariant un système continu de courbes qui n'est ni un faisceau de courbes elliptiques invariantes pour* T

ou pour T^r, *ni un faisceau linéaire invariant de courbes elliptiques, cette surface est:*

1°) *rationnelle ou appartient à la classe des surfaces réglées* ($P_4 = P_6 = 0$, $p_a \leq 0$), *ou*

2°) *elle possède un groupe continu de transformations birationnelles en elle-même, et alors, elle est hyperelliptique* ($p_g = P_4 = 1$, $p_a = -1$), *ou elliptique* ($p_g P_4 \neq 1$, $p_a = -1$).

Les surfaces que nous excluons possèdent toutes un faisceau de courbes elliptiques, mais c'est précisément là le cas général des surfaces admettant des transformations non périodiques, car M. Enriques a montré que si une surface n'appartenant pas à la classe des réglées (rationnelles ou irrationnelles) et n'ayant pas un groupe continu de transformations birationnelles, possède une transformation birationnelle non périodique, elle possède un faisceau de courbes elliptiques, ou bien elle a tous les genres égaux à un (1). Remarquons cependant que notre théorème permettra de repondre à la question posée récemment par M. Severi (2).

Qu'il me soit permis de remercier M. Enriques, grâce aux conseils duquel j'ai pu mener à bonne fin ce travail.

2. Soit F une surface algébrique admettant une transformation birationnelle non périodique T, en elle-même. Par hypothèse, cette transformation laisse invariant un système continu de courbes $\{C\}$. Deux cas peuvent se présenter:

a) Le système $\{C\}$ est un faisceau;

b) Le système $\{C\}$ est d'indice supérieur à l'unité.

Nous traiterons d'abord ce second cas. Tout d'abord, remarquons que le système $\{C\}$ peut être supposé ne pas appartennir à un système linéaire, car celui-ci, ou un multiple convenable de celui-ci, serait au moins ∞^3 et le théorème d'Enriques-Fano serait applicable. De plus, on peut admettre que tout système linéaire $|C|$, contenu dans $\{C\}$, est au moins triplement infini. S'il en était autrement, on considérerait, au lieu de $\{C\}$, un de ses multiples convenablement choisi (3), certainement invariant pour T.

(1) *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali*, Rend. Accad. Lincei, 1906.

(2) *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica*, Rend. di Palermo, 1910, t. XXX.

(3) On établit simplement qu'un multiple de $\{C\}$, $\{nC\}$ contient des systèmes linéaires, $|nC|$, au moins ∞^6, pour n assez grand. Si m et π sont les degré et genre virtuels de C, les degré et genre virtuels de nC sont respectivement

$$M = n^2 m \ , \quad \Pi = n\pi + \tfrac{1}{2} n(n-1)m - (n-1).$$

On peut choisir n suffisamment grand pour que

$$M - \Pi + 1 = \tfrac{1}{2} mn(n+1) - n(\pi - 1)$$

soit aussi grand qu'on le vent. Alors, par le théorème de Riemann-Roch, le système $|nC|$ a la dimension au moins égale à trois. Ajoutons que $\{C\}$ n'étant pas un faisceau, le système $\{nC\}$ est certainement irréductible.

Considérons un modèle projectif F* de la surface F, situé dans S_3, et dont les sections planes sont des courbes C. Les transformations T, T^2, ... vont changer ces sections planes en des courbes d'un système continu; et par conséquent, ces courbes seront découpées sur la surface F* par des surfaces d'un même ordre μ, formant un système continu. Soient $i_1, i_2, \ldots$ les paramètres (en nombre fini) dont dépendent les surfaces de ce système continu. Les transformations T, T^2, ... pourront évidemment être représentées par des formules

$$\begin{cases} x' = \varphi(x, y, z, i_1, i_2, \ldots), \\ y' = \psi(x, y, z, i_1, i_2, \ldots), \\ z' = \chi(x, y, z, i_1, i_2, \ldots), \end{cases}$$

les fonctions φ, ψ, χ étant d'ordre μ, et les transformations étant seulement caractérisées par les valeurs des paramètres $i_1, i_2, \ldots$

Si

$$f(x, y, z) = 0$$

est l'équation de la surface F*, on devra avoir, par hypothèse,

$$f(\varphi, \psi, \chi) \equiv f(x, y, z).$$

De cette identification, on déduit des équations algébriques liant les paramètres $i_1, i_2, \ldots$ Les solutions de ces équations seront en nombre infini, puisque l'on a une infinité de transformations T, T^2, ... ; et par conséquent, elles formeront une variété continue. Par suite, la surface F*, ou F, aura une série continue de transformations birationnelles en elle-même.

Si cette série forme un groupe, la surface F est (1) rationnelle, ou appartient à la classe des réglées, ou bien elle est hyperelliptique, ou elliptique. Si cette série ne forme pas un groupe, la surface F est rationnelle ou référable à une réglée (2).

3. Examinons maintenant le cas où le système continu $\{C\}$ est un faisceau.

Le faisceau $\{C\}$ peut être invariant de deux façons, suivant que la transformation T change une courbe C en elle-même, ou en une autre courbe C. Dans la première hypothèse, un théorème de Hürwitz permet d'affirmer que les courbes C sont rationnelles (et alors la surface F se laisse transformer en une réglée) ou elliptiques (et la surface F est du type général assigné par M. Enriques aux surfaces admettant une transformation

(1) Enriques, *Sulle superficie che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni...* Rendiconti di Palermo, 1905, t. XX.

(2) Castelnuovo ed Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*, Annali di Matematica, 1901, ser. 3ª, t. VI.

non-périodique). Supposons donc que la transformation T change une courbe C en une autre courbe C de façon à donner une suite infinie de courbes C homologues appartenant au même faisceau. Supposons de plus que la surface F n'est ni rationnelle, ni référable par une transformation birationnelle à une surface réglée, ce qui n'enlève rien à la généralité.

Le faisceau $\{C\}$, considéré comme suite continue d'éléments (courbes), est transformé en lui-même par une transformation non périodique, et par suite, il est rationnel ou elliptique (théorème de Hürwitz).

Dans le faisceau $\{C\}$, les modules des courbes C dépendent algébriquement du paramètre du faisceau. Mais en partant d'une courbe C et appliquant successivement la transformation T, on obtient une infinité de courbes ayant les mêmes modules. Cette propriété va nous permettre de montrer que la surface F admet un groupe continu de transformations birationnelles en elle-même, sauf dans le cas où les courbes C sont elliptiques et le faisceau $\{C\}$ linéaire.

Distinguons deux cas, suivant que le faisceau $\{C\}$ est elliptique, ou linéaire.

Si le faisceau $\{C\}$ est elliptique, il ne peut contenir des courbes C ayant un point double (ou multiple). Supposons en effet qu'il y ait une courbe $\overline{C}$ dotée d'un point double. La courbe $\overline{C}$ est certainement invariante pour T, sans quoi on aurait, dans le faisceau, une infinité de courbes ayant le genre inférieur à celui d'une C générique, ce qui est impossible. D'autre part, une transformation non périodique donnée sur une courbe elliptique ne peut posséder de coincidences, donc la courbe $\overline{C}$ ne peut être invariante pour la transformation T, non périodique, opérant sur le faisceau elliptique $\{C\}$. Par suite, le faisceau $\{C\}$ ne possède pas de courbes ayant un point double (ou multiple). Cela étant, on déduit d'une formule donnée par MM. Castelnuovo et Enriques (loc. cit., n. 6), que l'invariant de Zeuthen-Segré de F est $I = -4$. Mais, pour la surface F, on a $p^{(1)} = 1$ (Enriques, loc. cit., Rend. Acc. Lincei): donc

$$I + p^{(1)} = 12p_a + 9 = -3,$$

et $p_a = -1$. On sait que les surfaces ayant $p_a = -1$ admettent un groupe continu de transformations birationnelles (Enriques, loc. cit., Rend. Palermo).

Passons au cas où le faisceau $\{C\}$ est linéaire, les courbes C n'étant pas elliptiques. On peut de plus supposer que le courbes C ne sont pas rationnelles, sans quoi, la surface F serait référable à une réglée.

Deux courbes C quelconques, de genre $p > 1$, ont des modules égaux, par suite il existe entre ces courbes un certain nombre de transformations birationnelles. Ce nombre est certainement fini, sans quoi les courbes C seraient elliptiques ou rationnelles. Désignons ce nombre par n. Alors, partant d'un point P d'une courbe C et construisant les conjugués sur les dif-

férentes courbes du faisceau, on obtient une courbe K, certainement transformée en elle-même par la transformation T (et par suite elliptique ou rationelle). Faisant varier le point P, on obtient un faisceau de courbes K invariantes. Remarquons que si les courbes K étaint réductibles, elles seraient composées avec les courbes d'un faisceau, lequel serait sûrement invariant pour T.

Le système $\{C + K\}$, ou un multiple convenable de ce système, donne lieu à un système continu invariant pour la transformation T, qui n'est pas un faisceau. Nous avons déjà démontré que dans ce cas, la surfaces F, si elle n'est pas référable à une réglée, possède un groupe continu de transformations birationnelles en elle-même.

Ainsi se trouve complètement démontré le théorème annoncé dans le préambule.

3. Du théorème qui vient d'être établi et du théorème de M. Enriques, on déduit que:

Si une surface algébrique de genre $p_a \geq 0$, *non rationnelle, possède une transformation birationnelle non périodique en elle-même* T, *les seuls systèmes continus* (*linéaires ou non*) *que la transformation laisse invariants peuvent être des faisceaux de courbes elliptiques invariantes* (*pour* T *ou pour* T^r) *et des faisceaux linéaires de courbes elliptiques.*

Matematica. — *Sopra un teorema relativo agl'insiemi.* Nota del dott. L. Orlando, presentata dal Corrispondente A. Di Legge.

Denoti (a, b) un intervallo d'ampiezza finita $b - a > 1$, sul quale esista un'infinità numerabile di insiemi ω di punti; ognuno di questi ω abbia la misura di Borel non più piccola di 1. Dico che esiste nell'intervallo (a, b) un insieme X di punti comuni ad un'infinità di insiemi ω, e che X ha misura non più piccola di 1. Sulla misurabilità di X e di altri insiemi che dobbiamo adoperare, rimandiamo il lettore a pag. 108 delle *Lezioni sull'integrazione* di Lebesgue.

Il teorema che abbiamo enunciato non è nuovo, ma le dimostrazioni che finora se ne dànno sono molto più complicate di questa che ho qui l'onore di esporre.

Diremo che un punto dell'intervallo (a, b) è dell'ordine ν quando esso è comune a ν insiemi ω; e chiameremo m_ν la misura dell'insieme di tutti i punti d'ordine ν. Per esempio, m_1 sarà la misura dell'insieme dei punti coperti una sola volta.

Supponiamo, per assurdo, che la misura m_∞ dei punti d'ordine infinito non superi $1 - \sigma$, dove σ è un numero positivo fisso, arbitrariamente piccolo.

La serie

$$m_1 + m_2 + m_3 + \dots\dots\dots,$$

di termini non negativi, converge evidentemente verso un valore non più grande di $b - a$. Posto

$$R_\nu = m_{\nu+1} + m_{\nu+2} + m_{\nu+3} + \dots\dots\dots,$$

noi possiamo dunque determinare ν in modo che risulti $R_\nu < \frac{\sigma}{2}$. La misura dei punti d'ordine $> \nu$ risulterà $< 1 - \frac{\sigma}{2}$.

Consideriamo tutti gl'insiemi ω che sopra (a, b) determinano i punti d'ordine non superiore a ν. Se questi insiemi ω, ora considerati, non sono tutti gli ω, allora esisterà qualche altro ω (di misura non più piccola di 1), i punti del quale si troveranno tutti fra i punti d'ordine $> \nu$. E allora i punti d'ordine $> \nu$ non potranno avere misura $< 1 - \frac{\sigma}{2}$.

Se poi questi insiemi ω, che sopra (a, b) determinano i punti d'ordine non superiore a ν, sono tutti gli ω, non può accadere che ognuno di essi apporti ai punti d'ordine non superiore a ν un contributo avente misura $> \frac{\sigma}{4}$. Assunti, infatti, $N > \frac{4}{\sigma}(b - a)\nu$ insiemi ω, ognuno dei quali apporti all'intervallo (a, b) un contributo di misura $> \frac{\sigma}{4}$, questi contributi non potranno (neanche con ν sovrapposizioni, e tanto meno quanto meno si sovrappongano) trovare posto in un intervallo di misura $b - a$. Ne risulta che esiste almeno un ω (di misura non più piccola di 1), il quale apporta ai punti d'ordine $> \nu$ un contributo di misura $> 1 - \frac{\sigma}{4}$. Ne emerge subito l'assurdo dell'ipotesi indebitamente ammessa, e la necessità che sia valido il teorema enunciato.

Il teorema si può apparentemente estendere, togliendo la riserva che l'insieme degli ω sia numerabile, e poi non supponendo la misurabilità degli ω, ma obbligandoli ad avere non inferiori ad 1 le misure inferiori. Ricavando allora dall'insieme degli ω un insieme numerabile, e da ognuno degli ω che lo costituiscono ricavando un insieme misurabile di misura non inferiore a 1, si giunge sempre ad un insieme misurabile X, di misura non inferiore ad 1, il quale raccoglie una parte dei punti d'ordine infinito; ciò mostra che la misura inferiore dei punti d'ordine infinito, dovuti a tutti gli ω, non è più piccola di 1.

Fisica matematica. — *Sulla propagazione del calore.* Nota del dott. L. Silla, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulla conservazione dell'energia e della materia del campo gravitazionale.* Nota di MAX ABRAHAM, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Intorno ad un modo di osservare quando due stelle hanno la stessa altezza o lo stesso azimut.* Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Gli strumenti di cui mi servo per verificare l'ora data dall'orologio di precisione del Gabinetto fisico dell'Università di Cagliari, sono stati costruiti collo scopo di supplire alla mancanza di strumenti stabili e precisi e sono basati sull'osservazione delle altezze corrispondenti d'una stella; ogni determinazione richiede quindi due osservazioni a parecchie ore d'intervallo, ciò che riesce incomodo specialmente se si vogliono eseguire parecchie determinazioni con stelle diverse.

Rimedia a questo inconveniente il noto metodo fondato sulla determinazione degli istanti diversi, in cui due stelle, aventi declinazioni poco differenti, hanno la stessa altezza.

Ho costruito per lo stesso scopo uno strumento molto semplice che dà modo di osservare quando due stelle qualsiasi hanno la stessa altezza; esso consiste essenzialmente d'un cannocchiale mobile in altezza ed azimut e di uno specchietto verticale sospeso a modo di pendolo per mezzo di un coltello o di qualsiasi altra disposizione equivalente, collocato dinanzi all'obbiettivo in modo da ostruirlo in parte e mobile attorno ad un asse verticale che gli serve di sostegno.

Due stelle piuttosto lontane abbiamo all'incirca la stessa altezza, dimodochè dirigendo il cannocchiale prima verso l'una e poi verso l'altra senza modificarne l'inclinazione, entrambe capitino successivamente nel campo.

Se mentre il cannocchiale è diretto verso una delle stelle si colloca nel suo campo lo specchietto e lo si orienta convenientemente, si potrà ottenere che compaiano simultaneamente entrambe le stelle, una vista direttamente, l'altra per riflessione sullo specchietto, e che esse siano sulla stessa verticale. Se l'osservazione è stata incominciata in tempo opportuno, e se si varia gradatamente l'orientazione dello specchietto in modo che le due immagini si mantengano sulla stessa verticale, si vedranno queste avvicinarsi,

coincidere ed allontanarsi. Se lo specchio è esattamente verticale, la coincidenza avverrà quando le due stelle hanno la stessa altezza, ed osservata l'ora di questa coincidenza data dall'orologio e l'ora dell'equialtezza calcolata mediante i dati delle tavole astronomiche, la differenza darà l'errore dell'ora data dall'orologio.

Non sarebbe molto difficile ottenere che lo specchietto nella sua posizione d'equilibrio fosse esattamente verticale, tuttavia ciò non è necessario e forse neppure utile.

Se lo specchietto è un po' inclinato verso l'osservatore (ossia produce immagini più alte degli oggetti cui corrispondono) si diriga il cannocchiale verso la stella che si abbassa e si osservi per riflessione quella che s'innalza; se invece lo specchietto è un po' inclinato dalla parte opposta all'osservatore (ossia produce immagini più basse degli oggetti cui corrispondono) si diriga il cannocchiale sulla stella che s'innalza e si osservi per riflessione quella che si abbassa. In entrambi i casi le due immagini avvicinantisi (quando si allontanano non possono più venire a contatto, l'ora dell'osservazione è trascorsa) appaiono più vicine per effetto dell'inclinazione dello specchio, la coincidenza ossia l'equialtezza delle due immagini avverrà quindi un po' prima dell'equialtezza delle due stelle. Osservato e notato l'istante della coincidenza si scambino le orientazioni del cannocchiale e dello specchietto, cioè si diriga il cannocchiale sulla stella che prima era osservata per riflessione, e si collochi e orienti lo specchietto in modo da vedere nel campo, per riflessione la stella che prima appariva nel campo direttamente. In tali condizioni le immagini, supposte ancora avvicinantisi, saranno allontanate per effetto dell'inclinazione invertita dello specchietto, la coincidenza ossia l'equialtezza delle due immagini avverrà dopo l'equialtezza delle due stelle e se il ritardo è abbastanza grande cioè se l'inclinazione dello specchio è sufficiente, o se il cambiamento di direzione e di posizione del cannocchiale dello specchietto è effettuato con sufficiente rapidità, si potrà osservare e notare l'ora della nuova coincidenza delle due immagini. Dalle ore delle suddette due osservazioni si potrà dedurre quella dell'equialtezza, sia prendendo semplicemente la media se esse si succedono a breve intervallo (meno di un minuto), sia con un semplice calcolo che sarà indicato in seguito.

Ho supposto nel precedente ragionamento che, come è preferibile, una delle stelle s'innalzi, l'altra s'abbassi; se invece entrambe s'innalzassero o s'abbassassero con diverse velocità, dovrebbe considerarsi l'innalzamento o l'abbassamento relativo di ciascuna stella rispetto all'altra.

Se il cannocchiale e lo specchietto sono del tutto indipendenti, si richiede un tempo non piccolo perchè si effettui lo scambio suddetto, anche se questo è reso più agevole con opportune disposizioni; gioverebbe quindi che cannocchiale e specchietto fossero connessi in modo che questo rimanesse sempre nel campo, comunque s'orientasse ed inclinasse il cannocchiale, cioè

che i due assi orizzontale e verticale attorno a cui questo può ruotare si intersecassero sullo specchietto.

Si può ottenere più facilmente lo stesso scopo, quello cioè di diminuire l'intervallo di tempo indispensabile affinchè entrambe le coincidenze delle immagini si possano osservare, usando uno specchietto riflettente su entrambe le faccie, oppure due specchietti fissati un contro l'altro colle superfici riflettenti a contatto, il quale produrrà da un lato immagini più alte, e da quello opposto immagini più basse degli oggetti cui corrispondono; sarà utile contrassegnare l'uno o l'altro di questi lati per poterli facilmente riconoscere.

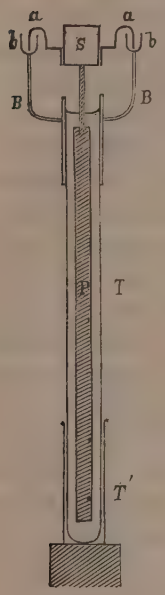
Diretto il cannocchiale sull'una o l'altra delle due stelle (su quella la cui osservazione diretta è più comoda) e collocato ed orientato lo specchietto in modo che nel campo compaiano le immagini avvicinantesi, a seconda della faccia su cui si effettua la riflessione, queste appariranno ravvicinate o allontanate per effetto dell'inclinazione dello specchietto, e la loro coincidenza sarà anticipata o ritardata. Si potrà dunque disporre lo specchieto in modo che le due immagini siano avvicinate, osservare e notare l'ora della loro coincidenza, e rapidamente fa ruotare lo specchietto di 180° attorno alla verticale, cioè cambiare la faccia riflettente, dimodochè le immagini ora allontanate appariscano ancora distanti e avvicinantisi, laonde si potrà osservare e notare l'ora della seconda coincidenza delle due immagini. Il tempo che occorre è certo molto minore di quello occorrente per lo spostamento del cannocchiale e dello specchietto, specialmente se l'esatta rotazione di 180° sarà ottenuta senza esitazione, non per tentativi, ma bensì coll'aiuto di un apposito indice o meglio limitata da un ostacolo convenientemente collocato.

Venendo a maggiori particolari sullo strumento e sul modo d'osservazione, poco è da notare a proposito del cannocchiale; è bensì indispensabile di ottenere facilmente e con sicurezza che lo specchietto si trovi nel suo campo. A tale scopo adattavo sul tubo del cannocchiale, dal lato dell'obbiettivo, un corto tubo che vi poteva scorrere e ruotare con dolce attrito, e che portava saldata una lunga astina d'acciaio parallela all'asse ottico e ripiegata all'estremità libera in modo da indicare dove incominciava il campo del cannocchiale; collocando quindi lo specchietto al disotto e a poca distanza da questa estremità ero sicuro che lo specchietto si trovava nel campo.

Una cura speciale richiese la difesa dello specchietto dalle correnti di aria, cui è molto esposto per effetto della sua posizione verticale. Provai a difenderlo coprendolo con una scatola di cartone, provvista di apposite aperture coperte con lamine di mica, ma mi riuscì difficile in pratica la sua costruzione; provai altresì a circondare lo specchietto con un tubo di mica (quali si usano per le lampade a petrolio o a gaz), ma esso indeboliva e deformava troppo le immagini.

Usai finalmente la disposizione rappresentata nella figura: S è lo specchietto formato da due lamine di vetro a faccie piane e parallele, di 1,8 cm.

di lato, inargentate sopra una faccia, e collocate colle pellicole d'argento (non verniciate e ben prive di pulviscolo) combacianti e così fissate mediante mastice collocato sugli orli; esso poi è circondato, inferiormente e ai due lati, da una listerella d'ottone ripiegata ad angolo retto ad entrambe le estremità.



a, *a* sono due grossi aghi spessi circa 1 mm. ripiegati mediante arroventamento parziale e saldati colla cruna alla suddetta lista d'ottone, mentre le punte verticali e dirette in basso riposano sul fondo di due tubettini *b*, *b*; questi sono masticiati sui due bracci d'ottone B, B che sono saldati inferiormente ad un corto tubo d'ottone masticiato alla sommità di un tubo di vetro T, lungo circa 40 cm. e di 2 cm. circa di diametro, e chiuso in fondo.

Questo tubo era ripieno d'olio lubrificante per macchine, nel quale era sospeso un tubo di ottone P (lungo poco meno di 40 cm., di 1 cm di diametro, ripieno di piombo versatovi fuso) sostenuto da una astina verticale d'acciaio immersa nel piombo e saldata superiormente alla suddetta lista d'ottone che regge lo specchietto.

Finalmente questo tubo di vetro è introdotto e può ruotare con dolce sfregamento entro un tubo d'ottone lungo 10 a 20 cm., (dimodochè buona parte del tubo di vetro rimane visibile), fissato sul treppiede, che riposa sul piano su cui è collocato il cannocchiale.

La congiungente delle estremità delle punte d'ago, ossia l'asse di sospensione e di oscillazione dello specchietto era approssimativamente a metà altezza di questo, dimodochè una corrente d'aria uniforme produceva sulle due metà inferiore e superiore dello specchietto momenti uguali e contrarii, ed inoltre essendo esse così vicine, difficilmente poteva sussistere una grande differenza di velocità fra le correnti che le urtava; mentre affinchè potesse prodursi una deviazione apprezzabile del peso P, non piccolo (e che potrebbe essere aumentato), col centro di gravità molto lontano dall'asse di rotazione, sarebbe necessaria una grande differenza dei due momenti.

Finalmente l'olio lubrificante non impedisce menomamente che lo specchietto col peso P prenda la sua posizione d'equilibrio immutata, ma impedisce affatto le oscillazioni.

Credo perciò che questa disposizione, che ha funzionato in modo ineccepibile nel presente strumento, possa essere utile in altri analoghi, quali il prisma a riflessione ad inclinazione costante, l'orizzonte artificiale con prisma o specchio sospeso ecc.

Questo strumento paragonato con altri a doppia immagine, come p. es. il sestante usato coll'orizzonte artificiale e gli strumenti analoghi ha lo

svantaggio che mentre in questi le due immagini hanno velocità orizzontali uguali e dirette nello stesso senso e velocità verticali opposte, e quindi regolato lo strumento in modo che esse immagini siano sulla stessa verticale, esse vi si manterranno nonostante il moto celeste, invece nell'apparecchio ora descritto, le due immagini hanno, (come è facile vedere geometricamente) velocità opposte tanto in senso verticale quanto in senso orizzontale, ed orientato lo specchietto in modo che le immagini si trovino sulla stessa verticale esse non vi si mantengono, una, quella diretta, segue il moto celeste, mentre l'altra per effetto della riflessione si muove in senso inverso. Occorre dunque che lo specchietto sia fatto ruotare con velocità opportuna nel senso del moto celeste affinchè le due immagini rimangano sulla stessa verticale; un eccesso o un difetto nella rotazione può far sì che non verificandosi questa condizione, le due immagini passino accanto senza mai coincidere.

Per diminuire questo inconveniente è utile anzitutto che il sostegno dello specchietto sia provvisto di un buon movimento a vite, con molla, attorno all'asse verticale, il quale agisca ugualmente bene in sensi opposti, in modo che si possa correggere facilmente l'effetto d'una rotazione eccessiva. Con un po' di pratica e d'attenzione sono riuscito anche a produrre la suddetta rotazione dello specchietto agendo lateralmente su uno dei tre piedi del sostegno in modo che questi girassero scorrendo sul piano di marmo su cui riposavano, ma è chiaro che il movimento a vite è certo preferibile.

Si può anche munire il cannocchiale di reticolo con filo orizzontale (opportunamente illuminato) e notare i tempi, pochissimo distanti, in cui le due immagini attraversano il filo, la media di questi tempi sarà quello cercato dell'equialtezza delle immagini. Inoltre si potrebbe usare l'oculare munito d'una lente cilindrica, quale viene usata negli spettroscopi stellari, che dia immagini lineari ed esattamente orizzontali delle due stelle, e così sarà facile ottenere che esse vengano a coincidere almeno ad una estremità.

Questo strumento può essere usato in varî modi:

1°. Si può con esso determinare quando l'orlo superiore e quello inferiore del sole hanno la stessa altezza d'un oggetto terrestre fisso e lontano, (come un punto speciale d'un monte, il comignolo d'un tetto o d'un camino), prima quando il sole sorge e poi quando declina, e quindi con le solite correzioni pel variare della declinazione del sole nell'intervallo dedurre l'ora del passaggio al meridiano del centro del sole.

2°. Si può osservare quando una stella ha la stessa altezza della Polare; dalla nota formula:

$$\operatorname{sen} h = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos(\vartheta - \alpha)$$

dove h è l'altezza comune della stella e della Polare, φ la latitudine, α e δ l'ascensione retta e la declinazione in gradi della Polare, e ϑ l'ora side-

rale, si ricava per la Polare il valore di h, che facilmente sarà esatto anche se l'ora indicata dall'orologio non lo è molto; quindi noto h applicando la stessa formula ai valori di α e δ dell'altra stella si potrà ricavare ϑ. Occorrendo, il calcolo potrebbe esser ripetuto usando il valore di ϑ corretto mediante il calcolo precedente.

3°. Se le due stelle di cui si osserva l'equialtezza hanno una declinazione poco diversa, si può applicare il solito metodo col quale si corregge la variazione di declinazione del sole, nel metodo delle altezze corrispondenti.

4°. Nel caso generale di due stelle qualsiasi, il calcolo con cui si può ricavare l'ora dell'equialtezza dai dati delle Tavole astronomiche è il seguente:

Sia φ la latitudine e siano α ed α', δ e δ' le ascensioni rette in gradi, e le declinazioni di due stelle, sia ϑ l'ora siderale, θ e θ' gli angoli orari delle due stelle (il tutto nell'istante dell'equialtezza h) dimodochè sia $\theta = \vartheta - \alpha$, $\theta' = \vartheta - \alpha'$ e sia p. es. $\alpha' > \alpha$, quindi $\alpha' - \alpha = \theta - \theta' = \varepsilon > o$, $\theta' = \theta - \varepsilon$.

Nell'istante dell'equialtezza sarà:

$$\operatorname{sen} h = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos\theta = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta' + \cos\varphi \cos\delta' \cos(\theta - \varepsilon)$$

ossia:

$$\operatorname{tang}\varphi(\operatorname{sen}\delta - \operatorname{sen}\delta') = \cos\delta' \cos(\theta - \varepsilon) - \cos\delta \cos\theta$$

$$= \cos\theta.(\cos\delta' \cos\varepsilon - \cos\delta) + \operatorname{sen}\theta. \cos\delta' \operatorname{sen}\varepsilon$$

Indicando con a, b, c i valori noti, che si possono calcolare abbastanza rapidamente, di

$$\operatorname{tang}\varphi(\operatorname{sen}\delta - \operatorname{sen}\delta') \text{ [ossia: } 2\operatorname{tang}\varphi \,.\, \operatorname{sen}(\delta - \delta')/2 \,.\, \cos(\delta + \delta')/2\text{]},$$

$$(\cos\delta \cos\varepsilon - \cos\delta) \quad \text{e} \quad \cos\delta' \operatorname{sen}\varepsilon$$

si ha:

$$a = b\cos\theta + c\operatorname{sen}\theta\,.$$

Come è noto per risolvere rapidamente questa equazione rispetto a θ si introduce un angolo ausiliario ω (dato da $\operatorname{tang}\omega = c/b$ e quindi noto) tale che l'equazione si riduce a

$$b\cos(\theta - \omega) = a\cos\omega$$

donde si ricava $\theta - \omega$, quindi θ, poi ϑ e finalmente l'ora media.

Questo calcolo non è molto complicato ed eseguito una volta per due stelle, dà con ϑ l'ascensione retta di un punto della sfera celeste, l'ora del cui passaggio al meridiano coincide con quello dell'equialtezza, e non varia che molto lentamente per effetto delle variazioni, sia apparenti, che reali, degli elementi delle due stelle.

5°. In un modo simile si potrebbe osservare quando hanno invece lo stesso azimut due stelle qualsiasi, p. es., la Polare ed un'altra stella, secondo un noto metodo, oppure (collo scopo di ottenere la massima differenza di velocità delle due immagini), due stelle moventisi quasi orizzontalmenle ed in senso contrario, una di esse essendo presso l'equatore l'altra presso l'orizzonte, entrambe presso il meridiano.

Si osservi una stella con un cannocchiale il cui campo sia parzialmente ostruito da uno specchietto mobile attorno ad un asse orizzontale, parallello o meglio coincidente col piano della faccia riflettente e perpendicolare all'asse ottico del cannocchiale; questo specchietto produrrà di una stella qualsiasi un'immagine di uguale azimut e di altezza variabile coll'inclinazione di esso.

Se quindi questa seconda stella si trova in un azimut abbastanza poco diverso da quello della prima stella verso cui è diretto il cannocchiale, si potrà ottenere regolando l'inclinazione dello specchietto che nel campo appaiono ed abbiano la stessa altezza le immagini delle due stelle, una vista direttamente l'altra per riflessione. Se l'osservazione è incominciata in tempo, queste due immagini andranno avvicinandosi, e (se si mantengono, quando occorra, sulla stessa orizzontale) coincideranno e poi s'allantoneranno. L'istante della coincidenza e quello dell'equiazimut supposto lo strumento ben regolato; quando non lo fosse invertendo la posizione dello specchietto rispetto alla verticale e rispetto all'asse del cannocchiale, potrebbero osservarsi quattro coincidenze, e la media delle ore relative darebbe quella dell'equiazimut. Questa determinazione è però meno agevole di quella dell'equialtezza.

Chimica. — *Azione delle aldeidi sui corpi pirrolici. Scomposizione pirogenica dei derivati del dipirrilmetano* (1). Nota di U. Colacicchi, presentata dal Socio G. Ciamician.

In una Nota precedente (2) ho descritto i prodotti che si formano per azione delle aldeidi grasse su alcuni derivati pirrolici, prodotti corrispondenti alla formola generale di derivati del dipirrilmetano,

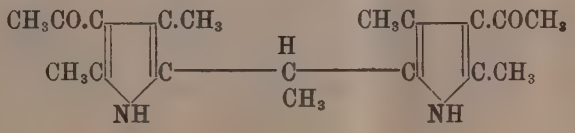
ed ho visto quali sono le condizioni per cui possono generarsi. Avevo pure accennato alla mia intenzione di proseguire ed estendere tali ricerche anche

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Parma, diretto da G. Plancher.

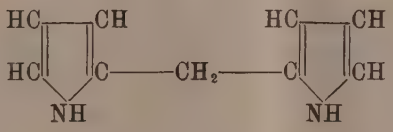
(2) Rend. Acc. Lincei, vol. XX, serie 5ª, 2° sem., pag. 312; Gazz. chim. ital., XLII, I, pag. 10.

alla formazione di quei corpi più complessi di cui rimase finora ignota la costituzione ed a proposito dei quali ho già espresso quali sono le mie idee; ma di questi studî, già a buon punto, renderò conto in seguito. Per ora mi preme di far conoscere il modo come si comportano al calore i derivati già descritti, di far vedere cioè come si scindano gli aggruppamenti -CHR- che legano i due nuclei pirrolici, per dar luogo alla formazione di altri corpi.

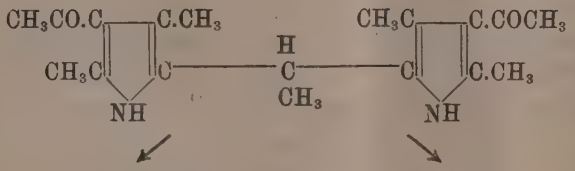
In questa Nota tratto principalmente della scomposizione pirogenica del prodotto della paraldeide col 2-4-dimetil-3-acetilpirrolo.

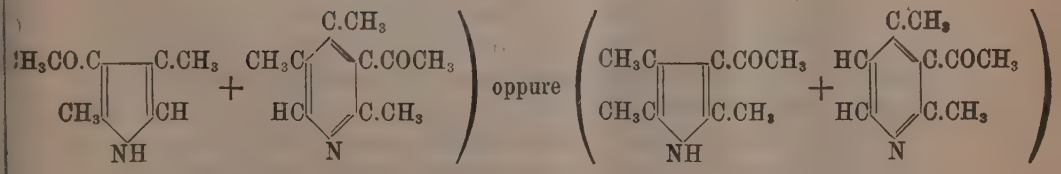


Questo prodotto essendo analogo al metilendipirrolo di Pictet (1)



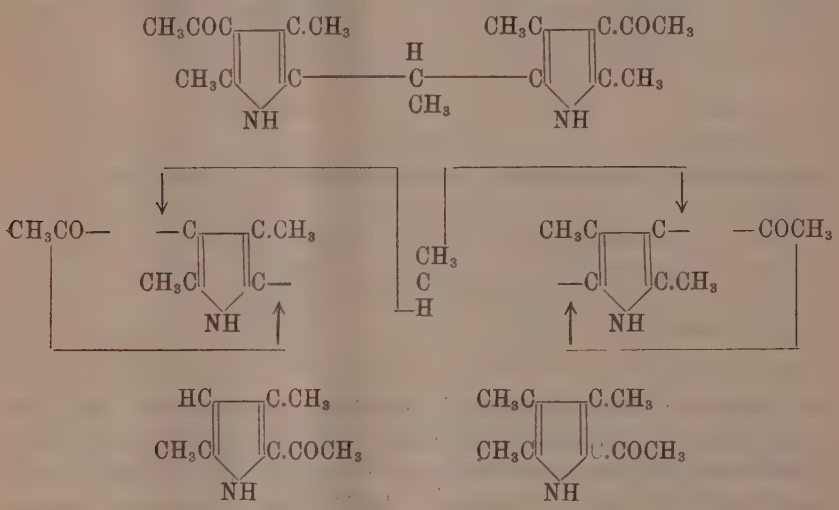
era presumibile avesse al calore il medesimo comportamento, desse cioè origine a pirrolo rigenerato e ad una piridina; cioè il legame -CH.CH_3- si scindesse in H, che rifornirebbe il prodotto primitivo, e $=C.CH_3-$ che entrando nell'altro nucleo e allargandolo, darebbe il derivato piridinico. Oppure che si scindesse in $-CH_3$ e $=CH-$ e in tal caso si avrebbe un omologo del derivato primitivo insieme ad una piridina, precisamente come indica lo schema:





(1) Ber. XL, I, 1166.

Ma in qualunque modo io abbia operata la scomposizione, sia a pressione ordinaria che a pressione ridotta, non ho potuto rilevare tracce di derivati piridici, avendo avuto costantemente la formazione di due corpi della composizione $C_8H_{11}NO$ e $C_9H_{13}NO$, e che ho identificati per un dimetil- e un trimetil-acetil-pirrolo. Però questi derivati pirrolici non sono il prodotto primitivo rigenerato ed un suo omologo, ma loro isomeri con l'acetile in α. Questa scomposizione non è perciò tanto semplice, perchè, mentre avviene la rottura del legame etilidenico, si ha pure lo spostamento dei radicali $CH_3.CO$ da un atomo di carbonio del nucleo all'altro,



La mancata formazione di corpi piridici in questa reazione pirogenica può spiegarsi se si pensa che la temperatura, alla quale si compie, non è sufficientemente elevata perchè avvenga l'apertura del nucleo pirrolico; infatti Pictet ottenne è vero piridina dal metilendipirrolo ed anche dall'α-metilpirrolo, ma questi prodotti furono distillati in una canna di vetro rovente la cui temperatura è certo superiore a quella che si richiede per provocare la scomposizione del derivato in questione.

Parte sperimentale.

La distillazione può farsi in una stortina a collo corto e largo, oppure in un palloncino di Anschütz; volendo operare a pressione diminuita è conveniente servirsi di quest'ultimo.

In una storta di 30 cc. di capacità vengono introdotti 10 gr. di sostanza e scaldati a bagno di lega fino a completa fusione che è accompagnata da un leggiero svolgimento di fumi; allora conviene innalzare la temperatura

del bagno: così comincia a distillare regolarmente un bell'olio giallo che passa tutto fra 250-300° e tosto solidifica nel collettore raffreddato con un getto d'acqua. Nella storta rimane un residuo carbonioso misto a piccole quantità di sostanza che viene asportata con etere.

Il distillato, che è completamente solido, è costituito da una massa giallo scura in cui si notano dei begli aghi o prismetti ed ha un odore leggermente acetico analogo a quello del metilpirrilchetone. È poco solubile a freddo in acqua, etere di petrolio, ligroino, abbastanza solubile in alcool, benzolo, acetone, etere acetico; non completamente in etere solforico; mentre a caldo si scioglie abbastanza nella maggior parte di questi solventi. Comincia a fondere a 100° e fonde completamente verso 150°.

Per la separazione delle sostanze contenute in questo miscuglio mi sono valso della loro differente solubilità in etere solforico e volatilità al vapor d'acqua.

Tutta la massa viene trattata diverse volte con etere, a freddo, finchè questo resta incoloro. Si ottiene così un residuo costituito da una polvere biancastra, leggiera, fondente tra 130° e 150°. Le soluzioni eteree riunite lasciano per evaporazione un residuo giallo rossastro che viene sottoposto alla distillazione in corrente di vapor d'acqua finchè il distillato è incoloro. Il contenuto del pallone della distillazione, filtrato, a caldo, per separarlo dalla poca resina formatosi, per raffreddamento depone una sostanza in aghi raggruppati fondenti a 130-135°.

La parte volatile al vapore d'acqua viene estratta con etere; per evaporazione del solvente si ottiene un residuo cristallino che si purifica prima dall'alcool diluito e poi dal ligroino bollente. Si ottiene così in forma di pagliette o prismetti mescolati appena rosei che fondono a 121-122°.

Sottoposto all'analisi ha mostrato di avere la composizione $C_8H_{11}NO$

	Calcolato per $C_8H_{11}NO$	Trovato
C %	70,06	70,47 - 69,89 - 70,07
H	8,03	8,33 - 8,10 - 8,39
N	10,22	10,42 - 10,41

Questa sostanza è stata identificata col 2-4-dimetil-5-acetilpirrolo sia facendo il punto di fusione del miscuglio dei due prodotti, sia condensandolo coll'aldeide formica. Infatti ho ottenuto il corrispondente derivato del dipirrilmetano che fonde a 272° identico a quello descritto nella Nota precedente.

Una determinazione di azoto di questo prodotto mi ha dato un risultato concordante per la formola $C_{17}H_{22}N_2O_2$

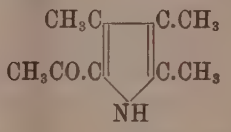
	Calcolato per $C_{17}H_{22}N_2O_2$	Trovato
N %	9,79	10,05

La parte del prodotto insolubile in etere e fondente a 130-150° si scioglie abbastanza in acqua bollente, alcool, cloroformio, benzolo, etere acetico; è quasi insolubile in etere di petrolio. Però è conveniente cristallizzarla prima dall'alclol assoluto, poi dall'etere acetico. Così si ottiene in bellissimi aghetti lucenti incolori che fondono a 160°.

All'analisi ha dato numeri che corrispondono abbastanza a quelli richiesti per la formola $C_9H_{13}NO$

	Calcolato per $C_9H_{13}NO$	per $C_{10}H_{15}NO$	Trovato
C %	71,52	73,62	71,80 - 71,62
N	8,61	7,97	8,94 - 8,79
N	9,27	8,59	9,23 - 9,31 - 9,12

Per la sua composizione dimostra di essere un omologo del prodotto precedente: con ogni probabilità si tratta del 2-3-4-trimetil-5-acetilpirrolo



La sostanza a punto di fusione 130-135°, formatasi in più piccola quantità delle altre, non è un prodotto unico, ma in essa è contenuto certamente in maggior parte il 2-4-dimetil-3-acetilpirrolo, poichè condensata in soluzione alcoolica con formaldeide ha dato un prodotto fondente a 268°, identico a quello che si ottiene con questo derivato.

Ne fu fatta una determinazione di azoto.

	Calcolato per $C_{17}H_{22}N_2O_2$	Trovato
N %	9,79	9,91

Che veramente si tratti del derivato coll'acetile in β è stato dimostrato dalla bellissima colorazione verde che dà bollito con acido acetico glaciale e che lo differenzia dall'isomero coll'acetile in α che non dà questa colorazione.

Infine dirò che ho operata la trasposizione del 2-4-dimetil-3-acetilpirrolo scaldandolo in tubo chiuso; questo derivato si è trasformato quasi quantitativamente nell'isomero coll'acetile in α.

Dirò anche che riducendo col metodo di Knorr l'isonitroso acetilacetone in presenza di metiletilchetone, contrariamente a quanto era naturale attendersi, non si è avuta la formazione di 2-3-4-trimetil-5-acetilpirrolo, ma si è invece ottenuta la dimetildiacetilpirazina fondente a 98°.

Invece riducendo con lo stesso metodo isonitrosometiletilchetone in presenza di acetilacetone ho ottenuto con buonissimo rendimento il 2-4-5-trimetil-5-acetilpirrolo fondente a 209-210°. Questo derivato non essendo identico a quello che io ho ottenuto nella scomposizione pirogenica, quest'ultimo dovrà certamente avere la costituzione che gli ho assegnata.

Il 2-4-5-trimetil-3-acetilpirrolo per trattamento con idrato di idrazina mi ha fornita la chetazina corrispondente, prodotto difficilmente solubile nella maggior parte dei solventi, ma cristallizzabile dal nitrobenzolo. Fonde al disopra di 280°.

Sono già in corso i lavori per ottenere da questa il fillopirrolo. La descrizione più particolareggiata di questi prodotti e delle loro trasformazioni formeranno oggetto di una prossima comunicazione.

Con animo grato porgo i miei ringraziamenti al laureando sig. Cesare Bertoni che mi è stato di valido aiuto nella esecuzione di questo lavoro.

Chimica. — *Sugli ossisolfuri d'antimonio*(1). Nota di E. Quercigh, presentata dal Corrisp. A. Piutti.

Fra le sostanze che fin'ora furono ritenute e descritte quali composti ternarii chimicamente definiti fra lo zolfo, l'antimonio e l'ossigeno, ve ne sono alcune che si possono considerare come derivate dal trisolfuro d'antimonio per sostituzione di uno o più atomi di zolfo con altrettanti di ossigeno; altri ossisolfuri come SbO_2S e Sb_2OS oppure Sb_2O_5S, che secondo Faktor (2) si potrebbero preparare per via umida, contengono meno antimonio.

Alla prima categoria appartiene il composto Sb_4OS_5 descritto da Otto Schumann (3) ed ottenuto da lui facendo agire l'idrogeno solforato sul pentossido d'antimonio prima a freddo e poi a caldo finchè lo sviluppo d'acqua e la separazione di zolfo non si arrestava e fondendo, infine, il prodotto ottenuto; l'analisi di questo portò a stabilirne la formola su riportata.

Un altro ossisolfuro Sb_2OS_2 di questo stesso tipo fu pure ottenuto operando in modo analogo al precedente col triossido d'antimonio dallo Schumann e molto tempo prima da Regnault (4) per arroventamento del trisolfuro in corrente di vapor d'acqua, e poi da R. Schneider (5) per azione dell'ossido di zinco e dell'acqua sul solfoioduro $Sb_4I_4S_4$.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Napoli.

(2) Pharm. Post 33 (1900) 233.

(3) Lieb. Ann. 187 (1877) 312.

(4) Ann. Chim. Phys. 62 (1863) 383.

(5) Pogg. Ann. 110 (1860) 151.

Siccome il composto Sb_2OS_2 si trova in natura come confermando le ricerche di H. Rose dimostrò H. Baubigny (1) analiticamente, e costituisce la Kermesite, minerale perfettamente caratterizzato che si presenta in cristalli monoclini con simmetria pseudorombica (2), se si mette in relazione la proprietà che essa ha di cambiare notevolmente colla fusione tanto di aspetto che di peso specifico colle conclusioni dello Schumann, vien fatto di supporre che l'ossisolfuro Sb_2OS_2 possa esistere in una seconda forma non rinvenuta finora dai mineralogisti.

Se si considera d'altra parte che H. Rose (3) fondendo in varie proporzioni il triossido col trisolfuro d'antimonio stabilì che i prodotti ottenuti erano costituiti da miscele isomorfe dei varî ossisolfuri, si vede quanto poco precise sieno le cognizioni che si possiedono a questo riguardo e risulta evidentemente di un certo interesse l'appurare quali relazioni di affinità esistano tra l'antimonio, lo zolfo e l'ossigeno tanto più che le conclusioni tanto di Rose che dello Schumann, per i mezzi di cui disposero e le esperienze da cui le dedussero, non sono affatto persuasive.

Prima di tutto era necessario stabilire se i composti dello Schumann esistono realmente nelle masse fuse da lui ottenute e quali limiti avessero le soluzioni solide ammesse da Rose, ed a tale scopo il metodo di ricerca più adatto sembra essere l'analisi termica. Intrapresi perciò lo studio del sistema binario $Sb_2O_3 + Sb_2S_3$ servendomi di un galvanometro di Siemens & Halske e di un termoelemento platino-platinorodio di mm. 0.2 di diametro.

Le miscele venivano fuse colle solite precauzioni in tubi di vetro di Jena difficilmente fusibili e le osservazioni delle temperature si fecero di 10 in 10 secondi.

Il triossido d'antimonio impiegato proveniva dalla fabbrica Kahlbaum di Berlino ed aveva la densità di 5.325 a 15° e cristallizzava a 656°. Il trisolfuro fu preparato in laboratorio; la sua densità a 15° era 4.632 ed il suo punto di solidificazione era a 548°.

Le quantità dei costituenti furono regolate in modo da avere circa cm.^{3} 2 di sostanza per ogni determinazione.

Queste miscele fondono facilmente sotto i 660°, ma la loro cristallizzazione avviene frequentemente con forti soprafusioni che raggiungono perfino i 30°. La semina di cristallini della sostanza soprafusa serve alle volte, ma non sempre, ad ovviare le soprafusioni. Ad ogni modo ripetendo numerose volte l'esperienza, si arriva a stabilire per ogni concentrazione con approssimazione sufficiente il punto normale di cristallizzazione iniziale; gli altri punti critici non presentano anomalie.

(1) Compt. rend. 119, 737 (1894).
(2) Pjatznitzky Zeitschr. f. Krist. 20, 442.
(3) Pogg. Ann. 89 (1853) 316.

La velocità di raffreddamento ha una grande influenza sul ritardo della cristallizzazione, e per un raffreddamento rapidissimo essa è addirittura impedita, dimodochè le miscele si solidificano in masse vetrose. Questo accade di preferenza per forti concentrazioni di Sb_2O_3.

L'aspetto delle masse fuse è metallico per concentrazioni elevate di trisolfuro, il loro colore è grigio ferro, per quelle invece ad alta concentrazione di triossido si ha color giallo rossastro speciale; tutte sono molto fragili.

Dalle curve di raffreddamento delle varie miscele si può compilare la seguente tabella di valori medî per le temperature critiche:

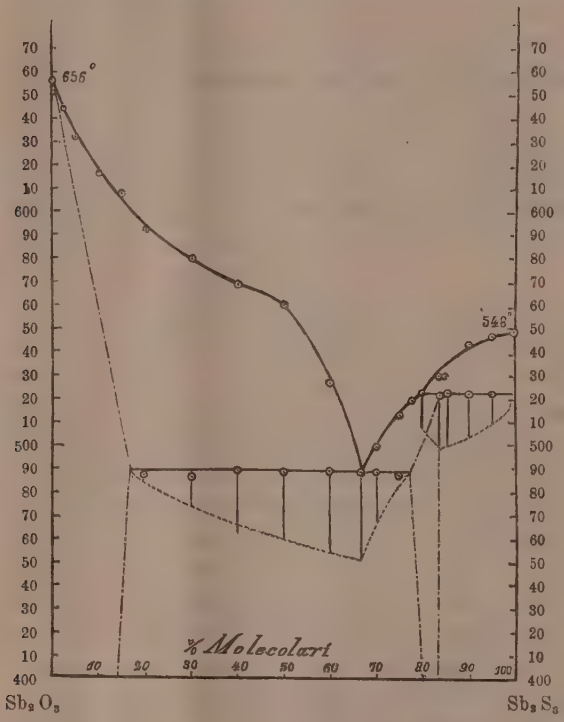
N.	Concentrazioni in % molecolari		Equilibri monovarianti	Equilibri invarianti		Durata degli equilibri invarianti
	Sb_2O_3	Sb_2S_3		I	II	
1	100.—	0.—	—	656°	—	—
2	97.5	2.5	644°	—	—	—
3	95.—	5.—	632	—	—	—
4	90.—	10.—	616	—	—	—
5	85.—	15.—	608	—	—	—
6	80.—	20.—	592	487	—	30
7	70. —	30.—	580	486	—	70
8	60.—	40.—	569	489	—	140
9	50.—	50.—	560	488	—	150
10	40.—	60.—	526	489	—	170
11	33.33	66.66	—	489	—	190
12	30.—	70.—	500	488	—	120
13	25.—	75.—	513	487	—	30
14	22.50	77.50	519	—	—	—
15	20.—	80.—	—	—	522°	70
16	16.66	83.33	530	—	521	110
17	15.—	85.—	530	—	522	110
18	10.—	90.—	544	—	522	90
19	5.—	95.—	547	—	522	60
20	0.—	100.—	—	548	—	—

In questa tabella le singole durate degli equilibrî invarianti sono espresse in secondi e riferite col calcolo a masse di 10 grammi.

Coi dati riportati si costruisce il diagramma temperature-concentrazioni rappresentato della fig. 1, il quale esprime quindi lo stato di equilibrio nel sistema $Sb_2S_3 + Sb_2O_3$ alle varie temperature.

Da esso si vede che le miscele di trisolfuro e di triossido d'antimonio si possono dividere per riguardo al modo di cristallizzare, in varî gruppi:

I. Miscele aventi concentrazioni comprese tra 100 e 85 °/₀ molecolari circa di Sb_2O_3. Esse presentano un rallentamento della velocità di raffreddamento in corrispondenza all'inizio della cristallizzazione ed alcun arresto di temperatura. Coll'aumentare della concentrazione del trisolfuro la temperatura di cristallizzazione iniziale si abbassa costantemente ed in modo notevole.



II. Miscele di concentrazioni comprese tra l'85 ed il 23 °/₀ circa di Sb_2O_3. Presentano prima un rallentamento iniziale, il quale ha luogo a temperature variabili (e sempre più basse coll'aumentare della concentrazione di Sb_2S_3 fino al 66 °/₀ circa, quindi sempre più elevate), poi un arresto alla temperatura costante di 489°. Per la miscela al 33.33 °/₀ di Sb_2O_3 il punto d'arresto a tale temperatura coincide col rallentamento iniziale, cioè in tale intorno il sistema passa direttamente da bivariante ad invariante. Le durate degli arresti sono espresse come al solito dalle lunghezze di segmenti che dimostrano evidentemente come la concentrazione eutectica sia quella del 33.33 °/₀ circa di Sb_2O_3.

III. Miscele comprese fra il 23 ed il 20 °/₀ di Sb_2O_3. Possiedono solo un rallentamento al principio della cristallizzazione.

IV. Miscele comprese fra l'80 ed il 100 % di Sb_2S_3. Esse presentano oltre al rallentamento in corrispondenza all'inizio della cristallizzazione, un arresto alla temperatura costante di 522°.

Tutte queste miscele subiscono la soprafusione e solo, in via eccezionale, colla semina di cristallini di Sb_2S_3 si arriva ad osservare i punti superiori, altrimenti si manifesta solo l'arresto a 522°.

Dall'insieme dei fenomeni osservati si conclude:

1°. Il triossido ed il trisolfuro d'antimonio sono miscibili allo stato fuso in tutti i rapporti.

2°. Essi formano un composto corrispondente alla formola Sb_4OS_5 (cioè $5\,Sb_2S_3 . Sb_2O_3$) il quale non fonde inalterato, ma si scompone a 522° in cristalli di Sb_2S_3 e fase liquida secondo l'equazione reversibile:

$$Sb_4OS_5 \text{ crist.} \rightleftarrows Sb_2S_3 \text{ crist.} + \text{liq.}$$

3°. Esistono cristalli misti in rapporti limitati fra Sb_2O_3 ed Sb_4OS_5 le cui concentrazioni sono comprese negli intervalli $0 — 18$ % Sb_2S_3 e $16.66 — 23$ % Sb_2O_3.

4°. L'eutectico fra Sb_2O_3 ed Sb_4OS_5 ha la concentrazione della Kermesite, il che dimostra come questo composto non possa ottenersi per fusione dei componenti. Ciò è anche confermato dal fatto che in natura la Kermesite fu trovata sempre in giacimenti di carattere perfettamente sedimentario.

5°. Dei due ossisolfuri dello Schumann soltanto il Sb_4OS_5 si forma realmente nella cristallizzazione della massa fusa.

6°. La formazione di soluzioni solide nel sistema $Sb_2O_3 + Sb_2S_3$ è, contrariamente all'opinione di H. Rose, molto limitata.

Chimica. — *Analisi termica di miscele binarie di cloruri di elementi monovalenti.* Nota III di C. Sandonnini e P. C. Aureggi, presentata dal Socio G. Ciamician.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Botanica farmaceutica. — *Sull'Abrus precatorius* L. Nota preventiva [1] del dott. Gino Pollacci, presentata dal Socio G. Briosi.

Dopo che nel 1882, l'oculista De Wecker introdusse con successo nella terapia oculistica l'uso dei semi di *Abrus precatorius* o *Jequirity*, molti sono gli autori che studiarono tale pianta sotto l'aspetto clinico, chimico, farmacologico, fisiologico, botanico e tossicologico. Nessuno però ha trovato una reazione sicura che permetta al medico, al farmacista od al chimico di assicurarsi rapidamente e con facilità se la droga da esso usata provenga veramente da semi di *Abrus precatorius*.

Le sofisticazioni di tali semi esotici sono frequentissime; io mi sono rivolto, per avere del materiale di studio, a medici, a stabilimenti botanici e farmaceutici e da commercianti, sia in Italia che fuori, ed ho ricevuto talvolta da essi come *Jequirity* dei semi di *Rhynchosia phaseoloides* D. C., di *Ormosia dasycarpa* ed *Adenanthera pavonina* L. Tale fatto, che spiega i varii risultati contradditorî ottenuti coll'*Abrus* in terapia, non deve meravigliare, poichè i semi delle piante suddette presentano caratteri morfologici sovente poco dissimili da quelli dell'*Abrus precatorius*, il quale varia spesso di colore e di volume. La polvere poi non offre caratteri diagnostici differenziali nemmeno al microscopio; nè possediamo reazioni caratteristiche per gli estratti e gli infusi.

Grande importanza ha quindi la ricerca di mezzi sicuri per distinguere la vera droga da quella sofisticata. L'importanza terapeutica di tali semi è ora accresciuta per il fatto che non solo nell'oculistica, ma altresì nella cura di alcune forme di cancro, essi vengono impiegati in seguito alle ricerche del chiño prof. Roberto Rampoldi [2]. Ora credo di avere trovata una reazione caratteristica per distinguere in modo sicuro i prodotti ottenuti coi semi di *Abrus precatorius* L. da quelli delle piante colle quali si sostituiscono. L'*Abrus precatorius* infatti contiene sostanze solubili in acqua fredda; delle quali una, localizzata nel tegumento seminale, che in presenza di potassa caustica dà una colorazione rosso-bruna ed un'altra contenuta nei co-

[1] Il lavoro per esteso verrà pubblicato negli Atti dell'Istituto Botanico di Pavia, ove fu eseguito

[2] Il prof. Rampoldi stesso mi dice che le sue osservazioni cliniche avevano condotto lui pure a sospettare che talvolta i semi da lui usati non contenessero i principii attivi desiderati o ne contenessero di diversi. È assai probabile che queste eccezioni, nei risultati clinici, fossero dovute alla natura dei medicamenti impiegati: preparati forse non con veri semi di *Jequirity*, ma con semi di qualcuna delle piante sopra indicate.

tiledoni che con acido nitrico dà una colorazione giallo-canario. Quest'ultima reazione, com'è noto, è comune alle albumine, ma essa diventa una reazione diagnostica importante per l'*Abrus*, poichè sostanze solubili in acqua ed aventi tale proprietà non sono contenute nei semi di *Ormosia*, *Rhynchosia* ed *Adenanthera* coi quali si confondono facilmente in commercio i semi del *Jequirity*. Anche i semi delle molte altre leguminose da me esaminati, come altresì quelli del *Ricino* e del *Croton* ecc. che, come è noto, contengono principî attivi molto vicini a quelli dell'*Abrus precatorius*, non dànno tale reazione. La colorazione gialla della soluzione ottenuta con polvere di cotiledoni è data, secondo me, da sostanza albuminoide solubile, e di fatti, oltre alla suddetta reazione coll'acido nitrico il soluto ha le seguenti proprietà:

Trattato con nitrato acido di mercurio dà un precipitato che, dopo ebullizione, si riunisce in un coagulo rosso (reazione di Millon) Con acido cloridrico e dopo l'influenza del calore, il soluto si colora in bruno (reazione di Liebermann-Wurster).

Con acido acetico ed acido solforico concentrato il soluto si colora in rosso-scuro (reazione di Adamkiewiecz).

Il soluto limpido, sottoposto al calore, diventa albescente.

Oltre poi a questa sostanza o gruppo di sostanze solubili che devono considerarsi come albuminoidi, vi è un altro corpo localizzato nel tegumento seminale che non è un albuminoide e che con la potassa caustica dà una forte colorazione rosso-bruna.

Allo scopo di accertarmi se le reazioni suddette erano dovute alla presenza di Abrina, ho trattato dell'abrina pura con acqua fredda (17 C.) e nel filtrato ho messo poche goccie di acido nitrico: istantaneamente è comparsa una colorazione gialla, identica a quella ottenuta colla polvere di *Jequirity*.

Trattato invece con potassa caustica, tale estratto non dà la colorazione rossa già detta.

Siccome secondo molti autori la *ricina* ha proprietà affini all'*abrina*, ho pure trattato la *ricina* pura con acqua ed il filtrato con acido nitrico, ma nessuna colorazione è comparsa anche sottoponendolo all'azione della potassa caustica.

Con tutta probabilità quindi, la sostanza che dà con acido nitrico la colorazione gialla caratteristica all'estratto dei semi di *Abrus*, è l'*abrina* affatto diversa da quella contenuta nei tegumenti seminali e che dà la colorazione rossa colla potassa. Colorazione questa che si ottiene anche col filtrato acquoso della polvere dei tegumenti seminali della *Rhjnchosia phaseoloides* D. C.

In possesso di tali reazioni, a me è occorso, benchè solo da poco tempo abbia incominciato le ricerche, di poter accertarmi già fin d'ora, che alcuni farmaci usati dai medici come ottenuti con l'*Abrus precatorius* L. erano

invece preparati con altri semi, non contenevano i principii attivi del *Jequirity* e naturalmente non potevano dare i risultati medicamentosi desiderati.

Una tale constatazione dimostra la necessità di accertarsi sempre se questi medicamenti sono veramente preparati con *Jequirity*, il che si può facilmente accertare colle reazioni sopra indicate, seguendo il metodo che qui espongo.

Esame di polveri. — La polvere da esaminarsi si mette in provetta con acqua distillata e si sbatte per pochi secondi; poi si filtra tale liquido fino a che il filtrato resta limpido: tale filtrato viene in seguito trattato con acido nitrico. Se la polvere di semi in esame è di vero *Abrus precatorius* L., il filtrato deve colorarsi in giallo-canarino, colorazione persistente a lungo e che non scompare ma si accentua col calore. Se si tratta lo stesso filtrato con potassa caustica e si colora in rosso-bruno, segno è che la polvere in esame contiene anche i tegumenti seminali polverizzati. La colorazione rossa si può ottenere insieme a quella gialla nello stesso tubo di assaggio; bisogna in tal caso prima trattare il filtrato con acido nitrico e poi aggiungere goccia a goccia la potassa; se la polvere è di *Jequirirys* e contiene anche i tegumenti seminali, si differenziano nettamente due strati del liquido, l'inferiore giallo ed il superiore rosso-bruno. Se si forma la sola colorazione gialla e non la rossa, segno è che la polvere è stata fatta coi soli cotiledoni.

Esame dei semi. — Qualora nasca il dubbio sulla specie del seme o porzione del seme in esame, si polverizzino tali parti e poi si proceda come è indicato per le polveri.

Esame dei medicamenti. — Ricavati dai semi di *Jequirity* vengono messi in commercio diversi farmaci; quelli iscritti nella Farmacopea ufficiale italiana sono i seguenti:

Estratto fluido dai semi di *Abrus precatorius*;

Dischetti di Jequiritina per uso oftalmico;

Pomata di Jequiritina.

Per il saggio dell'estratto fluido basta prenderne una piccola quantità, filtrarlo e trattarlo con acido nitrico; se è veramente ricavato da semi di *Abrus*, la colorazione gialla caratteristica si ottiene anche se si diluisce l'estratto con acqua: gli estratti messi in commercio non dànno la reazione rossa colla potassa perchè vengono preparati con semi sbucciati.

Per il saggio dei dischetti basta che uno o due dischetti vengano tenuti in acqua e dopo averli agitati si filtri quest'acqua e la si tratti al solito coll'acido nitrico; se i dischetti sono preparati con *Abrus precatorius*, l'acqua filtrata deve colorarsi in giallo coll'acido nitrico. Se preparati con semi sbucciati, non si colorano in rosso colla potassa.

Per il saggio della pomata si sbatte ripetutamente e con diligenza con acqua distillata; se è stata fatta con estratto fluido di vero *Abrus precatorius*, l'acqua filtrata deve colorarsi in giallo. Per questo saggio però è necessario che l'acqua venga in contatto di molta pomata.

Fisiologia. — *Azione dell'adrenalina, della paraganglina e della ipofissina, sul rene.* Nota di Pentinalli e Quercia, pres. dal Corrisp. Bottazzi.

Patologia vegetale. — *Formazione e significato fisiologico dei cordoni endocellulari nelle viti affette da arricciamento.* Nota di L. Petri, presentata dal Socio G. Cuboni.

Le due Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

RICORDI DELL'ACCADEMIA

Il prof. P. G. Possenti, R. Ispettore degli Scavi per l'Umbria, invitato dal Presidente, presenta ed illustra la maschera in cera del principe **Federico Cesi,** colle seguenti parole:

Signori Accademici,

debbo l'altissimo onore di essere oggi accolto in questo illustre Consesso, onore d'Italia, ad un caso fortunato che mi fece rinvenire un prezioso cimelio, e quindi al cortese invito dell'illustre Presidente. Accolga Egli dunque il mio ringraziamento, e l'Accademia mi sia benevola nella breve e disadorna comunicazione.

La ridente terra di Acquasparta nel circondario di Terni, che dette i natali ed accolse le ossa del suo secondo duca, Federico Cesi, va gloriosa del ricordo che nella principesca dimora dei Cesi si adunò nei primi anni l'Accademia dei Lincei, vanto delle scienze che da tre secoli si svolsero sempre più vigorosamente fino a noi. Quei paesani si ripetono, con vero compiacimento, le tradizioni tramandate dagli avi, come se fossero prioprio stati presenti a quei fasti foggiando, a modo loro, le persecuzioni subite dalla famiglia ducale a cagione delle riunioni scientifiche dei sommi, tra cui Galileo,

raccolti in Acquasparta presso Federico dal suo fido compagno Anastasio Defilis interamnate.

E Acquasparta ha ben ragione di ricordare queste glorie, perchè anche i Cesi furono larghi di munificenza, di sussidi, di doni a quei cittadini, alle loro chiese, ai loro istituti. Tuttora si ammirano i resti di tanta grandezza; ma purtroppo sono esigui avanzi, perchè l'insipienza e la cupidigia degli uomini e le avarie del tempo hanno tutto profanato o distrutto.

Basterebbe ricordare la sparizione avvenuta, nella prima metà del secolo passato, del ricco arredamento di altare in argento, opera d'arte squisita di Benvenuto Cellini e dono di Federico Maria alla basilica, del costo di 618.70 scudi romani come risulta dalle memorie dell'archivio della chiesa (1).

Ma, se Acquasparta tiene ora più che mai ai ricordi di Federico Cesi, ciò è in relazione con un encomiabile risveglio fra i cultori delle scienze e della storia dell'Umbria, i quali s'interessano di questo illustre suo figlio, lieti di raccogliere notizie e di renderle pubbliche. Nel 1872 il riconoscimento delle sue ossa, obliate in un sepolcro nella basilica di S. Cecilia in Acquasparta, fu avvenimento che ebbe eco lieta in ogni dove e fu reso solenne dalla presenza di valorosi scienziati, primo fra i quali l'illustre presidente dei Lincei del tempo, comm. Giuseppe Ponzi, senatore del Regno.

Del verbale estesissimo, rogato da due pubblici notari, non farò cenno, perchè esso è noto a questo illustre Consesso, avendone nei suoi archivi una delle tre copie.

Sembrava strano, però, che del grande Federico, contrariamente alle costumanze delle antiche prosapie, non esistessero ritratti autentici, toltine la medaglia già illustrata dall'Odescalchi e l'altra, più veritiera per somiglianza, che presento, ottenuta per cortesia di donna Elvira marchesa Cittadini in Olivieri, ultima superstite dei duchi Cesi (2). La medaglia in parola è fusa ma è di fattura squisita; e si vede che fu portata come ornamento poichè presentasi forata e logorata dallo attrito.

Altri ritratti dipinti esistono, è vero: uno in un quadro sacro nella parrocchia di S. Cecilia, un altro posseduto dalla famiglia, altri, infine, nei soffitti del palazzo ducale di Acquasparta. Però tutti questi dipinti dànno poco affidamento di verità, per essere o postumi o fatti a solo scopo di decorazione.

Forse, siccome le persecuzioni già subìte in vita da Federico, dalla famiglia e dai suoi amici, continuarono anche dopo la morte di lui, può darsi che le sue sembianze venissero disperse, trafugate o distrutte, come più tardi venne ignominiosamente violata la sua tomba; fatto, questo, ac-

(1) Notizia fornitami dal Rmo prof. Maturo, arciprete della basilica di S. Cecilia in Acquasparta, diligente cultore delle discipline storiche.

(2) Veggasi l'unita tavola.

certato nel giorno del rinvenimento delle ossa, il 7 agosto 1872, e descritto nel verbale colle seguenti parole:

« ..... *fu esplorata la profondità della tomba che si trovò di circa* « *tre metri, per cui occorse una scala di legno per discendervi. Si di-* « *scese infatti uno ad uno, ma tutti furono colpiti da un sentimento di* « *orrore e di indignazione nel vedere che la tomba era stata violata,* « *giacchè le casse di legno erano state aperte, barbaramente scomposte,* « *e gli scheletri disordinati* ..... ».

Rispetto a queste violazioni, io mi accinsi a fare delle ricerche; ma, sventuratamente non esistono memorie nè negli archivi di famiglia nè in quelli del comune. Su tale punto interessante anche la tradizione tace; solamente in una vaga memoria, trascritta in un documento esistente nell'archivio comunale, si fa menzione che nel 1759 alcuni muratori penetrarono nel loculo demolendo parte della volta, propriamente sotto alla predella dell'altare appartenente alla famiglia Cesi; e, difatti, esaminando il luogo, si riconosce il posteriore rifacimento (1).

Interessandomi di queste e di altre ricerche, come dissi, mi parve dover far tesoro di un accenno sull'esistenza di un ritratto in cera supposto di Federico Cesi. Nulla di più potei rilevare nè dal municipio, nè dalla famiglia, nè da altre mie investigazioni. Colpito però dalla vaghissima notizia avuta, deliberai, nel giugno dello scorso anno, una gita in Acquasparta, con l'intento di fare minutissime ricerche nella basilica di S. Cecilia e nella canonica annessa. Esaminati ed elencati molti oggetti d'arte per l'innanzi trascurati, fra cui alcuni preziosissimi paramenti sacri dovuti alla munificenza dei Cesi, dopo aver frugato per ogni parte, in un bugigattolo terreno umido, privo di vetri all'unica finestra e designato col nome ampolloso di archivio della parrocchia, il sig. Arciprete m'indicò un vuoto praticato nel muro ad uso di ripostiglio. Ivi, in mezzo a volumi rosicchiati tra miseri ingombri d'ogni specie, si mostrò alfine il prezioso cimelio da me ricercato, sgualcito e pesto, che subito riscontrai essere la maschera autentica del grande fondatore dei Lincei e che oggi ho l'onore di presentarvi.

Niun dubbio può sorgere sulla sua autenticità, perchè il calco corrisponde alle linee generali dei vari ritratti sopra accennati, e, in ogni modo, esattamente alla bella medaglia conservata dalla famiglia.

La maschera, in cera policromata, fu certo eseguita da mano peritissima: essa ha l'impronta fresca ad onta degli sfregi subìti; ed io, per presentarla alla vostra ammirazione, non mi sono permesso di alterarla in niun modo, limitandomi solo a toglierle la polvere aggrumata alla superficie e a ridonarle la forma convessa che aveva perduto per il peso degli ingombri.

(1) Vedi Nota precedente.

Al rinvenimento era presente la guardia municipale, che la cortesia del sig. Sindaco di Acquasparta aveva posto ai miei ordini, non che il sig. Arciprete della basilica. Al Municipio fu redatto il verbale, controfirmato dai presenti e dal Sindaco; e questi, da me pregato, convocava per il pomeriggio la Giunta comunale, alla quale fu data la lieta comunicazione inaspettata, poichè nessuno conosceva l'esistenza del prezioso cimelio. Per mio consiglio — a lode del vero, accolto subito — quella Giunta deliberò: che tutti gli oggetti d'arte dispersi nel paese, ed in special modo le memorie dei Cesi, fossero tutti riuniti in apposito locale, designato d'accordo nella civica residenza.

Però io, lietissimo del risultato delle mie ricerche, pensai subito che le vere sembianze del sommo Principe, da tre secoli sconosciute dovessero conservarsi più degnamente: e quindi, ad accoglierle, non esservi altro luogo più adatto della sede di questa R. Accademia. Fatto il dovuto rapporto del rinvenimento all'on. Ministro della P. I., fermo nella mia idea, partecipai la notizia anche all'illustre Presidente dei Lincei, il quale, come pure S. E. il Ministro, mi fu benevolo di cortesi encomi.

Data la mancanza assoluta di documenti, non è facile trovare una spiegazione esauriente del come e del perchè la maschera in cera del principe Federico sia stata abbandonata in modo così sconveniente. Due vecchi sagrestani avrebbero, dopo il rinvenimento, assicurato che la famiglia dei Cesi, nel secolo passato, aveva fatto dono della menzionata maschera alla parrocchia di Acquasparta (1). Ma, per quale ragione la famiglia si sarebbe privata di tanto prezioso ricordo, mentre è noto che fu sempre gelosissima delle proprie memorie? E come mai avrebbe affidato alla parrocchia il cimelio, pur sapendo che i detrattori di Federico e degli amici di lui erano l'emanazione diretta del S. Uffizio e quindi della Curia romana? In ogni modo, anche questa versione, per me poco verosimile, riconfermerebbe l'odio secolare contro l'uomo, risultando tale fatto dal modo indegno con cui il cimelio fu tenuto.

Del resto, la versione sopra accennata mi sembra doversi assolutamente escludere. Per non andare lungi dal vero, occorre tener presente come la nobile salma fosse tumulata col massimo mistero, tanto da non conoscersi, fino al 1872, il luogo dell'ultimo riposo del Grande: e ciò a cagione delle persecuzioni alle quali anche dopo morto, il Duca fu fatto segno.

Può dunque pensarsi che il preposto al pietoso còmpito della tumulazione misteriosa, abbia cercato di nascondere anche l'effigie del Duca nello stesso avello per salvarla e che, poi, nell'epoca della violazione, sia stata estratta con altri oggetti, e forse, non conoscendosene l'importanza dai violatori, venisse gettata, senza alcun riguardo, in un posto qualsiasi.

(1) Vedi la Nota a pag. 424.

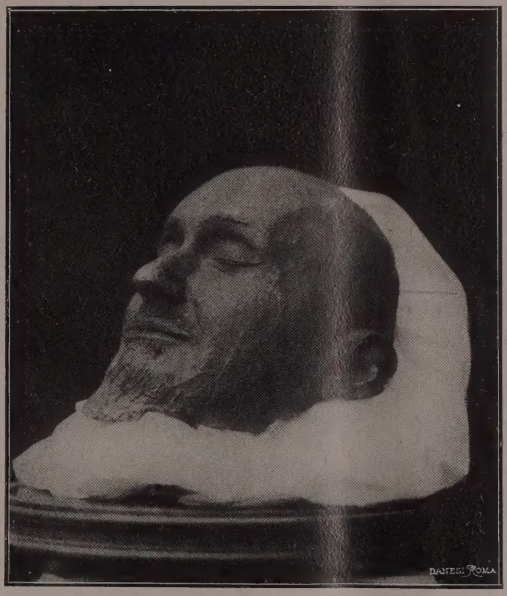
Ora, assolto il mio còmpito, o Signori, sono sicuro e lieto che la R. Accademia, portate a buon fine le pratiche occorrenti con l'on. Ministro della P. I., accoglierà e conserverà con venerazione il prezioso cimelio salvato dalla distruzione e dall'oblio.

Ma, giacchè ho l'onore di far udire la mia disadorna parola in questa sala mi permetto, con fervido desiderio di modesto artista, per dovere di R. ispettore dei monumenti, gelosissimo di quanto vi è di artistico e di glorioso nel circondario di Terni, rivolgere una vivissima raccomandazione: cioè, che quell'edificio insigne di Acquasparta il quale, sede dei Lincei, accolse nelle sue mura tanti valorosi, non venga più oltre abbandonato all'inevitabile disfacimento. Si escogiti una combinazione perchè vengano conservati all'arte quei maravigliosi soffitti intagliati riccamente, i quali, ora purtroppo cadenti, hanno vibrato alle voci di quei grandi, spesso pensierosi, talvolta ilari, arguti sempre, che con le loro scientifiche disquisizioni rivelavano il vero.

Parta da questo luogo un voto solenne per la conservazione della splendida dimora dei Cesi, quale già ebbe a pronunciarlo la R. Deputazione di storia patria per l'Umbria nell'ultimo Congresso tenutosi nella mia Terni in settembre. Certo, tante voci autorevoli verranno benevolmente ascoltate dall'illustre Direttore generale delle belle arti — che col massimo piacere qui vedo presente — il quale, con la sua sapiente genialità e squisita coscienza artistica, ha saputo circondare con tanta festa di gloria e di luce innumerevoli monumenti già destinati all'incuria e all'oblio. Nell'interesse della storia e dell'arte, ad onore della mia Umbria e dell'Italia tutta, confido nello adempimento di questo ardentissimo voto.

Alla lettura di questa Comunicazione erano presenti: il comm. Corrado Ricci, Dir. Gen. delle Antichità e delle Belle Arti, e il marchese avv. Mariano Cittadini Cesi.

E. M.



(Fot. V. Angelici — Terni)

Maschera in cera del principe FEDERICO CESI, fondatore dell'Accademia dei Lincei.

Medaglia coll'effige di FEDERICO CESI, posseduta dalla famiglia Cesi.